Halfwidths and position angle of a two dimensional Gauss function expressed in zero-th, first and second moments of a distribution

april 27, 2006

1 Introduction

Several sources of astronomical data can be characterized by an ellipse. If one starts to define a two dimensional Gauss function then this ellipse is a contour along which the pixel intensities are half the maximum intensity. The lengths of the ellipse axes are the half widths of the source and the position angle (in the astronomical definition) is the angle between the longest (major) axis and the direction of the north (usually the +y axis). In this document we derive formulas for the ellipse parameters with a method called moments analysis. The method was once used in applications for cleaning images with radio data. Nowadays is used to automatically calculate initial estimates of parameters used in least squares fit routines. GIPSY programs GAUFIT2D, MOMENTS2D and ANTPAT are examples of such applications.

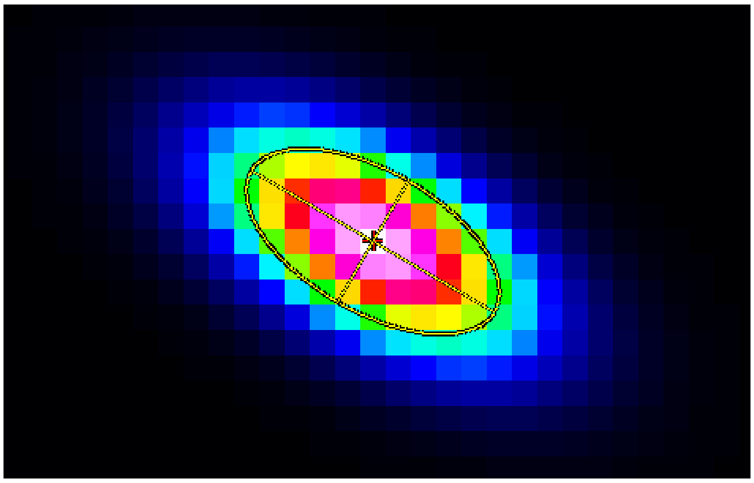

Figure 1: *Example of a gaussian shaped source with fitted ellipse. The ellipse follows the contour for which the pixel values are half the maximum value. It has a major axis and a minor axis. The angle between the major axis and the x axis is the rotation angle* θ *of the ellipse. The position angle* φ *is equal to* $90^o + \theta$.

2 The Gauss function

The Gauss function (GF) used to descibe our source must satisfy the next conditions:

- The volume under the GF must be equal to the sum of the pixel intensities in the image.
- The position of the maximum of the GF must coincide with the (pixel) position of the maximum of the source.
- The second moments with respect to the position of the maximum of the GF must be equal to those calculated using the pixel values in the map.

3 Calculation of the sum of components, position of the peak and second moments in (part of) an image containing the source

Define the grid coordinates of a pixel in an image as x_i, y_j and the value of that pixel as $t_{j,i}$. For the sum of those pixels we have:

$$M_0 = \sum_j \sum_i t_{j,i}.$$

For the grid coordinates of the position of the peak we have:

$$\begin{aligned}
\bar{x} &= \frac{1}{M_0} \sum_j \sum_i x_i t_{j,i} \\
\bar{y} &= \frac{1}{M_0} \sum_j \sum_i y_j t_{j,i}
\end{aligned}$$

And for the second moments we use the expressions:

$$\begin{aligned}
M_{xx} &= \frac{1}{M_0} \sum_j \sum_i (x_i - \bar{x})^2 \, t_{j,i} \\
&= \frac{1}{M_0} \sum_j \sum_i x_i^2 t_{j,i} - \frac{2}{M_0} \bar{x} \sum_j \sum_i x_i t_{j,i} + \frac{1}{M_0} \bar{x}^2 \sum_j \sum_i t_{j,i} \\
&= \frac{1}{M_0} \sum_j \sum_i x_i^2 t_{j,i} - \bar{x}^2 \\
M_{yy} &= \frac{1}{M_0} \sum_j \sum_i (y_j - \bar{y})^2 \, t_{j,i} \\
&= \frac{1}{M_0} \sum_j \sum_i y_j^2 t_{j,i} - \frac{2}{M_0} \bar{y} \sum_j \sum_i y_j t_{j,i} + \frac{1}{M_0} \bar{y}^2 \sum_j \sum_i t_{j,i} \\
&= \frac{1}{M_0} \sum_j \sum_i y_j^2 t_{j,i} - \bar{y}^2 \\
M_{xy} &= \frac{1}{M_0} \sum_j \sum_i (x_i - \bar{x}) \, (y_j - \bar{y}) \, t_{j,i}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{M_0}\sum_j\sum_i x_i y_j t_{j,i} - \frac{1}{M_0}\bar{x}\sum_j\sum_i y_j t_{j,i} - \frac{1}{M_0}\bar{y}\sum_j\sum_i x_i t_{j,i} + \frac{1}{M_0}\bar{x}\bar{y}\sum_j\sum_i t_{j,i} \\
&= \frac{1}{M_0}\sum_j\sum_i x_i y_j t_{j,i} - \bar{x}\bar{y}.
\end{aligned}
$$

3.1 Standard integrals

In our derivations we used the next standard integrals:

$$
\begin{aligned}
\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x &= \sqrt{\pi} \\
\int\limits_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2}\mathrm{d}x &= 0 \\
\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2e^{-x^2}\mathrm{d}x &= \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}.
\end{aligned}
$$

The expression of a two dimensional Gauss function (GF) is:

$$
\boxed{z(x,y) = z_0 \exp\left[-\left\{a(x-x_c)^2 + b(y-y_c)^2 + 2c(x-x_c)(y-y_c)\right\}\right]} \tag{1}
$$

3.2 Volume onder de functie

$$
\begin{aligned}
M_0 = &\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} z_0 \exp\left[-\left\{a(x-x_c)^2 + b(y-y_c)^2 + 2c(x-x_c)(y-y_c)\right\}\right]\mathbf{d}x\mathbf{d}y \\
&= z_0 \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\left\{a(x-x_c)^2 + 2c(x-x_c)(y-y_c) + \tfrac{c^2}{a}(y-y_c)^2 + \right\}\right]\mathbf{d}x \\
&\qquad \exp\left[-\left\{\left(b-\tfrac{c^2}{a}\right)(y-y_c)^2\right\}\right]\mathbf{d}y \\
&= \tfrac{z_0}{\sqrt{a}}\cdot\frac{1}{\sqrt{b-\frac{c^2}{a}}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} x.\exp\left[-\left\{\sqrt{a}(x-x_c) + \tfrac{c}{\sqrt{a}}(y-y_c) + \right\}^2\right] d\left\{\sqrt{a}(x-x_c)\right\} \\
&\qquad \exp\left[-\left\{\left(b-\tfrac{c^2}{a}\right)(y-y_c)^2\right\}\right]\cdot\left\{\sqrt{b-\tfrac{c^2}{a}}(y-y_c)\right\} \\
&= \tfrac{z_0}{\sqrt{ab-c2}}\cdot\sqrt{\pi}\cdot\sqrt{\pi}
\end{aligned}
$$

$= \frac{z_0\pi}{\sqrt{ab-c^2}}$

$$\boxed{M_0 = \frac{z_0\pi}{\sqrt{ab-c^2}}} \tag{2}$$

3.3 Position of the maximum

$\overline{x} = \frac{1}{M_0}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} x.z_0 \exp[-\{a(x-x_c)^2 + b(y-y_c)^2 + 2c(x-x_c)\}]\mathbf{d}x\mathbf{d}y$
$= \frac{z_0\sqrt{ab-c^2}}{z_0\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} x.\exp[-\{a(x-x_c)^2 + 2c(x-x_c)(y-y_c) + \frac{c^2}{a}(y-y_c)^2\}]\mathbf{d}x$

$\cdot \exp\left[-\left\{\left(b-\frac{c^2}{a}\right)(y-y_c)^2\right\}\right]\mathbf{d}y$

$= \frac{\sqrt{ab-c^2}}{\pi}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2\Big[\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\sqrt{a}(x-x_c) + \frac{c}{\sqrt{a}}(y-y_c)$

$\exp-\{\sqrt{a}(x-x_c) + \frac{c}{\sqrt{a}}(y-y_c)\}^2\Big]d\sqrt{a}(x-x_c) + \frac{c}{\sqrt{a}}(y-y_c)\cdot$

$-(b-\frac{c^2}{a}(y-y_0)^2)\mathbf{d}\sqrt{b-\frac{c^2}{a}}(y-y_c)$

$+\sqrt{a}x_a\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{[-\{\sqrt{a}(x-x_e) \qquad +\frac{c}{\sqrt{a}}(y-y_e)\}^2]}d\{\sqrt{a}(x-x_e)$

$+\frac{c}{\sqrt{a}}(y-y_e)\}e^{[-\{(b-\frac{c^2}{a})(y-y_e)^2\}]}d\{\sqrt{b-\frac{c^2}{a}}(y-y_e)\}$

$+(-c)\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{[-\{\sqrt{a}(x-x_e)+\frac{c}{\sqrt{a}}(y-y_e)\}^2]}d\{\sqrt{a}(x-x_e)$

$+\frac{c}{\sqrt{a}}(y-y_e)\}(y-y_e)e^{[-\{b-\frac{c^2}{a})(y-y_e)^2\}]}d\{\sqrt{b-\frac{c^2}{a}}(y-y_e)\}$

$= \frac{1}{\pi\sqrt{a}}[0 + x_e.\sqrt{a}\sqrt{\pi}\sqrt{\pi} - 0]$

$$\boxed{\overline{x} = x_e} \tag{3}$$

The result is as expected. This method, to calculate $\bar{x}$ can also be used to calculate $\bar{y}$ by changing the order of integration. The result is:

$$\boxed{\bar{y} = y_c} \tag{4}$$

3.4 Second moments with respect to the position of the peak

$$M_{xx} = \frac{1}{M_0} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - x_c)^2 Z_0 \ exp[-\{a(x - x_c)^2 + b(y - y_c)^2 + 2c(x - x_c)(y - y_c)\}]dxdy$$

$$= \frac{Z_0\sqrt{2b-c^2}}{Z_0\Pi} \cdot \frac{1}{a}\Bigg[\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \{a(x - x_c)^2 + 2c(x - x_c)(y - y_c)$$

$$+\frac{c^2}{a}(y - y_c)^2\}exp[-\{a(x - x_c)^2 + 2c(x - x_c)(y - y_c)$$

$$+\frac{c^2}{a}(y - y_c)^2\}]dx \cdot exp[-\{(b - \frac{c^2}{a})(y - y_c)^2\}]dy$$

$$+ - 2c \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - x_c) \ exp[-\{a(x - x_c)^2 + 2c(x - x_c)(y - y_c)$$

$$+\frac{c^2}{a}(y - y_c)^2\}]dx \cdot (y - y_c) \ exp[-\{(b - \frac{c^2}{a})(y - y_c)^2\}]dy$$

$$+ - \frac{c^2}{a} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} exp[-\{a(x - x_c)^2 + 2c(x - x_c)(y - y_c)$$

$$+\frac{c^2}{a}(y - y_c)^2\}]dx \cdot (y - y_c) \ exp[-\{(b - \frac{c^2}{a})(y - y_c)^2\}]dy\Bigg]$$

$$= \frac{\sqrt{ab-c^2}}{a\pi} \frac{1}{\sqrt{a}} \frac{1}{\sqrt{b-\frac{c^2}{q}}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Big\{\sqrt{a}(x - x_e)$$

$$+\frac{c}{\sqrt{a}}(y - y_e)\Big\}^2 exp\Big[- \Big\{\sqrt{a}(x - x_e) + \frac{c}{\sqrt{a}}(y - y_e)\Big\}^2\Big] d\Big\{\sqrt{a}(x - x_e)$$

$$+\frac{c}{\sqrt{a}}(y - y_e)\Big\}.exp\Big[- \Big\{(b - \frac{c^2}{a})(y - y_e)^2\Big\}\Big] d\{\sqrt{b - \frac{c^2}{a}}(y - \frac{1}{c})\}$$

$$+ - \frac{2c\sqrt{ab-c^2}}{a\pi}.\Big(\frac{1}{\sqrt{a}}\Big)^2 \Big[\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Big\{\sqrt{a}(x - x_e) + \frac{c}{\sqrt{a}}(y - y_e)\Big\}$$

$$exp\Big[- \Big\{\sqrt{a}(x - x_e) + \frac{c}{\sqrt{a}}(y - y_e)\Big\}^2\Big] d\Big\{\sqrt{a}(x - x_e) + \frac{c}{\sqrt{a}}(y - y_e)\Big\}.(y - y_e)$$

$$exp\Big[- \Big\{(b - \frac{c^2}{a})(y - y_e)^2\Big\}\Big] dy$$

$$+ - \frac{c}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} exp\Big[- \Big\{\sqrt{a}(x - x_e) + \frac{c}{\sqrt{a}}(y - y_e)\Big\}^2 d\Big\{\sqrt{a}(x - x_e)$$

$$+\frac{c}{\sqrt{a}}(y - y_e)\Big\}(y - y_e)^2 exp\Big[- \Big\{(b - \frac{c^2}{a})(y - y_e)^2\Big\}\Big] dy\Big]$$

$$+-\frac{c'\sqrt{ab-c^2}}{a\pi}.\frac{1}{\sqrt{a}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} exp\Big[-\Big\{\sqrt{a}(x-x_e)+\frac{c}{\sqrt{a}}(y-y_e)\Big\}^2\Big]d\Big\{\sqrt{a}(x-x_e)$$

$$+\frac{c}{\sqrt{a}}(y-y_e)\Big\}.(y-y_e)^2 exp\Big[-\Big\{(b-\frac{c^2}{a})(y-y_e)^2\Big\}\Big]dy$$

$$=\frac{\sqrt{ab-c^2}}{a\pi}\frac{1}{\sqrt{a}}\frac{1}{\sqrt{b-c^2/a}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\{\sqrt{a}(x-x_c)+\frac{c}{\sqrt{a}}(y-y_c)\}^2 exp[-\{\sqrt{a}(x-x_c)$$

$$+\frac{c}{\sqrt{a}}(y-y_c)\}^2]d\{\sqrt{a}(x-x_c)+\frac{c}{\sqrt{a}}(y-y_c)\}$$

$$\exp[-\{(b-\frac{c^2}{a})(y-y_c)^2\}]d\{\sqrt{b-\frac{c^2}{a}}(y-y_c)\}$$

$$-\frac{2c\sqrt{ab-c^2}}{a\pi}(\frac{1}{\sqrt{a}})^2[\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\{\sqrt{a}(x-x_c)$$

$$+\frac{c}{\sqrt{(a}}(y-y_c)\}exp[-\{\sqrt{a}(x-x_c)+\frac{c}{\sqrt{a}}(y-y_c)\}^2]d\{\sqrt{a}(x-x_c)$$

$$+\frac{c}{\sqrt{a}}(y-y_c)\}.(y-y_c)exp[-\{(b-\frac{c^2}{a})(y-y_c)^2\}]dy$$

$$+-\frac{c}{\sqrt{a}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} exp[-\{\sqrt{a}(x-x_c)$$

$$+\frac{c}{\sqrt{a}}(y-y_c)\}^2]d\{\sqrt{a}(x-x_c)+\frac{c}{\sqrt{a}}(y-y_c)\}.(y-y_c)^2 exp[-\{(b-\frac{c^2}{a})(y-y_c)^2\}]dy]$$

$$+-\frac{c^2\sqrt{ab-c^2}}{a\pi}.\frac{1}{\sqrt{a}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} exp[-\{\sqrt{a}(x-x_c)$$

$$+\frac{c}{\sqrt{a}}(y-y_c)\}^2]d\{\sqrt{a}(x-x_c)+\frac{c}{\sqrt{a}}(y-y_c)\}.(y-y_c)^2 exp[-\{(b-\frac{c^2}{a})(y-y_c)^2\}]dy$$

$$=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\cdot\sqrt{\pi}-\frac{2c\sqrt{ab-c^2}}{a^2\pi}\cdot 0+\frac{2c^2\sqrt{ab-c^2}}{a^2\pi\sqrt{a}}\cdot\sqrt{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(y-y_c)^2 exp\Big[-\Big\{\Big(b-\frac{c^2}{a}\Big)(y-y_c)^2\Big\}\Big]dy$$

$$-\frac{c^2\sqrt{ab-c^2}}{a^2\pi\sqrt{a}}\cdot\sqrt{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(y-y_c)^2 exp\Big[-\Big\{\Big(b-\frac{c^2}{a}\Big)(y-y_c)^2\Big\}\Big]dy$$

$$=\frac{1}{2a}+\frac{c^2}{a^2}\sqrt{\frac{ab-c^2}{a\pi}}\cdot\frac{1}{b-\frac{c^2}{a}}\cdot\frac{1}{\sqrt{b-\frac{c^2}{a}}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Big\{\Big(b-\frac{c^2}{a}\Big)(y-y_c)^2\Big\}\frac{1}{2a}$$

$$+\frac{c^2}{a(ab-c^2)\sqrt{\pi}}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\cdot\frac{1}{2a}+\frac{c^2}{2a(ab-c^2)}$$

$$=\frac{ab-c^2+c^2}{2a(ab-c^2)}$$

$$=\frac{b}{2(ab-c^2)}$$

So:

$$\boxed{M_{xx} = \frac{b}{2(ab-c^2)}} \tag{5}$$

This method, to calculate M_{xx} can also be used to calculate M_{yy}. The result is:

$$\boxed{M_{yy} = \frac{a}{2(ab-c^2)}} \tag{6}$$

$$M_{xy} = \frac{1}{M_0}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x-x_0)(y-y_0)\,z_0 exp[-\{a(x-x_0)^2+b(y-y_0)^2+2c(x-x_0)(y-y_0)\}]dxdy$$

$$= \frac{2\sqrt{ab-c^2}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x-x_0)\,exp[-\{a(x-x_0)^2+2c(x-x_0)(y-y_0)+\frac{c^2}{a}(y-y_0)^2\}]dx\cdot$$

$$\cdot\,(y-y_0)\,exp[-\{\left(b-\frac{c^2}{a}\right)(y-y_0)^2\}]dy =$$

$$= \frac{\sqrt{ab-c^2}}{\pi}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2\Bigg[\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\{\sqrt{a}(x-x_0)+\frac{c}{\sqrt{a}}(y-y_0)\}exp[-\{\sqrt{a}(x-x_0)+\frac{c}{\sqrt{a}}(y-y_0)\}^2]d\cdot$$

$$\cdot\{\sqrt{a}(x-x_0)+\frac{c}{\sqrt{a}}(y-y_0)\}\cdot(y-y_0)\,exp[-\{\left(b-\frac{c^2}{a}\right)(y-y_0)^2\}]dy+$$

$$\frac{c}{\sqrt{a}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}exp[-\{\sqrt{a}(x-x_0)+\frac{c}{\sqrt{a}}(y-y_0)]d\{\{\sqrt{a}(x-x_0)+\frac{c}{\sqrt{a}}(y-y_0)\}\cdot$$

$$\cdot\,(y-y_0)^2\,exp[-\{\left(b-\frac{c^2}{a}\right)(y-y_0)^2\}]dy\Bigg] =$$

$$= \frac{\sqrt{ab-c^2}}{a\pi}\cdot 0-\frac{c\sqrt{ab-c^2}}{a\pi\sqrt{a}}\cdot\sqrt{\pi}\cdot\frac{1}{b-\frac{c^2}{a}}\cdot\frac{1}{\sqrt{b-\frac{c^2}{a}}}\int_{-\infty}^{\infty}\{\left(b-\frac{c^2}{a}\right)(y-y_0)^2\cdot$$

$$\cdot\,exp[-\{\left(b-\frac{c^2}{a}\right)(y-y_0)^2\}]d\{\sqrt{b-\frac{c^2}{a}}(y-y_0)\} =$$

$$= \frac{-c}{(ab-c^2)\sqrt{\pi}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\pi}$$

$$= \frac{-c}{2(ab-c^2)}$$

$$\boxed{M_{xy} = \frac{-c}{2(ab-c^2)}} \tag{7}$$

Uit het bovenstaande volgt dat de constanten a,b en c in de formule voor de GF. uitgedrukt kunnen worden in de tweede momenten:

$a = M_{yy}(ab - c^2)$;

$b = 2M_{xx}(ab - c^2)$;

$c = -2M_{xy}(ab - c^2)$
Hieruit volgt dat geldt: $ab - c^2 = 4M_{yy}M_{xx}(ab - c^2) = (ab - c^2)^2(4M_{xx}M_{yy} - 4M_{xy}^2 \rightarrow$ $\frac{1}{(ab-c^2)} = 4M_{xx}M_{yy} - 4M_{xy}^2$. De eerste constanten kunnen dus geschreven worden als

$$a = \frac{M_{yy}}{2(M_{xx}M_{yy} - M_{xy}^2)} \quad b = \frac{M_{xx}}{2(M_{xx}M_{yy} - M_{xy}^2)} \quad c = \frac{-M_{xy}}{2(M_{xx}M_{yy} - M_{xy}^2)} \tag{8}$$

Dus: als de tweede momenten uit de map bekend zijn kunnen de constanten a,b en c direct berekend worden.

3.5 De ellips op halve lengte

De tweedimensionale functie

$$z(x, y) = z_0 e^{a(x-x_c)^2+b(y-y_c)^2+2c(x-x_c)(y-y_c)}$$

bereikt zijn extreme waarde voor

$$x = x_c, \;\; y = y_c \;\; : \;\; z(x_c, y_c) = e^0 = z_0.$$

Het verband tussen x en y op halve hoogte, d.w.z. voor
$z(x, y) = \frac{1}{2}z_0$, wordt gegeven door:
$z_0 e^{-a(x-x_c)^2+b(y-y_c)^2+2c(x-x_c)(y-y_c)} = \frac{1}{2}z_0$
Hieruit volgt:

$$\boxed{a(x - x_c)^2 + b(y - y_c)^2 + 2c(x - x_c)(y - y_c) = -\ln\tfrac{1}{2} = \ln 2} \tag{9}$$

Bovenstaande formule is de formule voor een tweedegraads kromme en kan een ellips, een parabool of een hyperbool voorstellen. M.b.v. methoden van de analytische meetkunde kan men bewijzen dat bovenstaande formule alleen dan een ellips kan voorstellen als geldt: $\underline{ab - c^2 > 0.}$

Het is echter niet zo,dat als a,b en c aan bovenstaande voorwaarde voldoen, dat dan (9) altijd de vergelijking van een ellips is. Het is nl. mogelijk a,b en c zodanig te kiezen dat

$ab - c^2 > 0$
maar dat voor elke y de bijbehorende x een imaginair getal is. In dat geval stelt (9) geen analytische kromme voor.
Uit de eis dat (9) een analytische kromme voor moet stellen volgt een voorwaarde voor a en b, en wel op de volgende manier:
Stel dat voor $x \neq x_c$ en $y \neq y_c$ geldt: $x - x_c = p(y - y_c) = p\Delta$. Dan geldt:
$z(x,y) = z_0^{[-\{ap^2\Delta^2 + b\Delta^2 + 2cp\Delta^2\}]} = z_0^{[-(f(p)\Delta^2)]}$ met $f(p) = ap^2 + 2cp + b$.
Het teken van de exponent wordt dus volledig bepaald door $f(p)$. De extreme waarden van $f(p)$ vindt men door $f(p)$ naar p te differentiëren: $\frac{df}{dp} = 2ap + 2c$ en $\frac{d^2f}{dp^2} = 2a$.
Uit deze afgeleiden volgt: de extreme waarden van $f(p)$ treedt op voor $p = p_0 = -\frac{c}{a}$ en is een maximum als $a < 0$ en een minimum als $a > 0$. De waarde van $f(p)$ in het minimum of maximum is:
$f(p_0) = a\frac{c^2}{a^2} + 2c(-\frac{c}{a}) + b = \frac{c^2}{a} - \frac{2c^2}{a} + b = -\frac{c^2}{a} + b = \frac{1}{a}(ab - c^2)$.
Als we aannemen dat de constanten a,b en c voldoen aan de eis voor een ellips ($ab - c^2 > 0$) dan geldt dus het volgende: als $a < 0$ dan heeft $f(p)$ een maximum en is dus altijd kleiner of gelijk dan $f(p_0)$. elkaar omdat $a < 0$ is $f(p_0) = \frac{1}{a}(ab - c^2) < 0$ omdat $ab - c^2 > 0$. Dit betekent dat $f(p) < 0$ voor elke p, zodat de GF $z(x,y) = z_0^{[-\{f(p)\Delta^2\}]}$ altijd $\geq z_0$ is. Dit betekent dat voor $a < 0$ de ellips op halve hoogte ($z(x,y) = \frac{1}{2}z_0$) niet bestaat.
Op dezelfde wijze als boven kan men bewijzen dat voor $a > 0$ de GF altijd $\leq z_0$, zodat dan de ellips op halve hoogte wel bestaat.
Omdat de halfwaarde breedte en de positiehoek berekend worden m.b.v de ellips op halve hoogte (zie pag 1) volgt uit het bovenstaande dat deze grootheden alleen beschermd kunnen worden als geldt: $ab - c' > 0$ en $a > 0$. Bovendien geldt dat aan de eertse voorwaarde alleen dan voldaan kan zijn als a en b hetzelfde teken hebben, zodat ook moet gelden $b > 0$.
In termen van de tweede momenten zijn bovenstaande voorwaarden te schrijven als:

$$\frac{M_{yy}M_{xx}}{4(M_{xx}M_{yy} - M_{xy}^2)^2} - \frac{M_{xy}^2}{4(M_{xx}M_{yy} - M_{xy}^2)^2} = \frac{1}{4(M_{xx}M_{yy} - M_{xy}^2)} > 0 \tag{10}$$

of

$$M_{xx}M_{yy} = M_{xy}^2 > 0 \tag{11}$$

met

$$M_{xx} > 0 \tag{12}$$

en

$$M_{yy} > 0 \tag{13}$$

3.6 Halfwaardebreedten HW1 en HW2 in gridcoordinaten

Om de formules voor de halfwaardebreedten af te leiden moet de formule (9) overgebracht worden in de vorm

$$\boxed{\frac{(x-x_c)^2}{u^2} + \frac{(y-y_c)^2}{v^2} = 1} \tag{14}$$

waarbij 2u en 2v de lengten van de assen van de ellipsen zijn. Dit kan bereikt worden door het assenstelsel over een zodanige hoek te draaien dat de term met $(x - x_c)(y - y_c)$ in (20) wegvalt. De hoek θ waarover het assenstelsel gedraaid moet worden, wordt gegeven door

$$(a-b)\sin\theta\cos\theta + c(\sin^2\theta - \cos^2\theta) = 0 \longrightarrow \tag{15}$$

$$\boxed{tan2\theta = \frac{2c}{a-b}} \tag{16}$$

Afhankelijk van de waarden van a,b en c zijn er de volgende vier mogelijkheden:

1) $a - b > 0; c > 0 \rightarrow 0^o < 2\theta < 90^o \rightarrow 0^o < \theta < 45^o \rightarrow sin\theta > 0$ en $cos\theta > 0$
2) $a - b > 0; c < 0 \rightarrow -90^o < 2\theta < 0^o \rightarrow -45^o < \theta < 0^o \rightarrow sin\theta < 0$ en $cos\theta > 0$
3) $a - b < 0; c > 0 \rightarrow -90^o < 2\theta < 0^o \rightarrow -45^o < \theta < 0^o \rightarrow sin\theta < 0$ en $cos\theta > 0$
4) $a - b < 0; c < 0 \rightarrow 0^o < 2\theta < 90^o \rightarrow 0^o < \theta < 45^o \rightarrow sin\theta > 0$ en $cos\theta > 0$

$tan^2 2\theta = \frac{sin^2 2\theta}{cos^2 2\theta} = \frac{1-cos^2 2\theta}{cos^2 2\theta} = \frac{1}{cos^2 2\theta} - 1 \rightarrow cos^2 2\theta = \frac{1}{1+tan^2 2\theta}$

$$\tan^2\theta = \frac{1}{1+\tan^2 2\theta} \tag{17}$$

Met $tan2\theta = \frac{2c}{a-b}$ volgt hieruit:

$cos^2 2\theta = \frac{1}{1+\frac{4c^2}{(a-b)^2}} = \frac{(a-b)^2}{(a-b)^2+4c^2} = (\frac{a-b}{p})^2$ met $p = \sqrt{(a-b)^2+4c^2}$

Als we nu wat de mogelijke waarden van 2θ betreft, beperken tot het gebied $-90^o \leq 2\theta \leq 90^o$, dan is $2\theta \geq 0$, zodat moet gelden: $cos2\theta = \frac{|a-b|}{p}$ want p is altijd > 0.

Uit $cos2\theta = 1 - 2sin^2\theta$ volgt $sin^2\theta = \frac{1-cos2\theta}{2} = \frac{1-\frac{|a-b|}{p}}{2} = \frac{p-|a-b|}{2p}$

Uit $cos2\theta = 2cos^2 2\theta - 1$ volgt $cos^2\theta = \frac{1+cos2\theta}{2} = \frac{1+\frac{|a-b|}{p}}{2} = \frac{p+|a-b|}{2p}$

$\sin\theta\cos\theta = \pm\sqrt{\frac{p-|a-b|}{2p}.\frac{p+|a-b|}{2p}} = \pm\sqrt{\frac{p2-(a-b)2}{4p2}}$

$= \pm\sqrt{\frac{(a-b)2+4c2-(a-b)2}{4p2}} = \pm\frac{c}{p}$

with $-90^o <= 2\theta <= 90^o(-45^o <= \theta <= 45^o$. Together with the 4 options shown previously on page $\sin\theta\cos\theta \ = \frac{c}{p}$ Het teken van (a, b), dat geldt: $\sin\theta\cos\theta = \frac{c(a-b)}{p(a-b)}$

Stel dat de coördinaten van een punt P met coördinaten x, y in het oorspronkelijke assenstelsel in het assenstelsel verkregen na rotatie over een hoek θ gegeven worden door $x^{'}, y^{'}$. Als de rotatie tegen de wijzers van de klok in positief genomen wordt geldt:

$$\boxed{x = x^{'}\cos\theta - y^{'}\sin\theta} \tag{18}$$

$$\boxed{y = x^{'}\sin\theta + y^{'}\cos\theta} \tag{19}$$

Hieruit volgt:

$$x - x_c = x^{'}\cos\theta - y^{'}\sin\theta + x^{'}_c\cos\theta - y^{'}_c\sin\theta \longrightarrow$$
$$x - x_c = (x^{'} - y_c{'})\cos\theta - (y^{'} - y^{'}_c)\sin\theta$$
$$y - y_c = (x^{'} - y_c{'})\sin\theta + (y^{'} - y^{'}_c)\cos\theta$$

Invullen van deze formules in (9) levert voor de vergelijking van de ellips in het nieuwe assenstelsel:

$$\begin{aligned}
&a[(x^{'} - x_c{'})^2\cos^2\theta - 2(x^{'} - x^{'}_c)(y^{'} - y^{'}_c)\sin\theta\cos\theta + (y^{'} - y^{'}_c)^2\sin^2\theta] \\
&\quad +b[(x^{'} - x_c{'})^2)\sin^2\theta + 2(x^{'} - x_c{'})(y^{'} - y_c{'})\sin\theta\cos\theta + (y^{'} - y_c{'})^2\cos^2\theta] \\
&\quad +2c[(x^{'} - x_c{'})^2\sin\theta\cos\theta - (x^{'} - x_c{'})(y^{'} - y_c{'})(\sin^2\theta - \cos^2\theta) - (y^{'} - y_c{'})^2\sin\theta\cos\theta \\
&= (x^{'} - x_c{'})^2(a\cos^2\theta + b\sin^2\theta + 2c\sin\theta\cos\theta) + (y^{'} - y_c{'})^2(a\sin^2\theta + b\cos^2\theta + 2c\sin\theta\cos\theta) + \\
&\quad -2(x^{'} - x_c{'})(y^{'} - y_c{'})[(a-b)\sin\theta\cos\theta + c(\sin^2\theta - \cos^2\theta)]
\end{aligned}$$

$$\boxed{= \ln 2} \tag{20}$$

Invullen van de formules voor $\sin^2\theta, cos^2\theta$ en $\sin\theta\cos\theta$ levert:

$$(x' - x'_c)^2[a\frac{p+|a-b|}{2p} + b\frac{p-|a-b|}{2p} + 2c\frac{c(a-b)}{p|a-b|}]$$

$$+(y' - y'_c)^2[a\frac{p-|a-b|}{2p} + b\frac{p+|a-b|}{2p} - 2c\frac{c(a-b)}{p|a-b|}]$$

$$+ - 2(x' - x'_c)(y' - y'_c)[(a-b)\frac{c(a-b)}{p|a-b|} + c\frac{p-|a-b|-p-|a-b|}{2p}]$$

$$= (x' - x'_c)^2[\frac{(a+b)p|a-b|+(a-b)|a-b|^2+4c'(a-b)}{2p|a-b|}]$$

$$+(y'-y'_c)^2[\frac{(a+b)p|a-b|-(a-b)|a-b|^2-4c'(a-b)}{2p|a-b|}]$$

$$-2(x'-x'_c)(y'-y'_c)[\frac{2c(a-b)^2-2c|a-b|^2}{2p|a-b|}]$$

$$=(x'-x'_c)^2[\frac{(a+b)p|a-b|+(a-b)p^2}{2p|a-b|}]+(y'-y'_c)^2[\frac{(a+b)p|a-b|-(a-b)p^2}{2p|a-b|}]$$

$$-2(x'-x'_c)(y'-y'_c)[0]$$

$$=\frac{1}{2}(x'-x'_c)^2[a+b+\frac{p(a-b)}{|a-b|}]+\frac{1}{2}(y'-y'_c)^2[a+b-\frac{p(a-b)}{|a-b|}]$$

$$=ln2$$

Als a-b>0 geldt: $\frac{(x'-x'_c)^2}{2ln2/(a+b+p)}+\frac{(y'-y'_c)^2}{2ln2/(a+b-p)}=1$
Als a-b<0 geldt: $\frac{(x'-x'_c)^2}{2ln2/(a+b-p)}+\frac{(y'-y'_c)^2}{2ln2/(a+b+p)}=1$

Omdat a,b en p allemaal groter dan 0 zijn, geldt in beide gevallen:
lengte lange as: HW1= $2\sqrt{\frac{2ln2}{a+b-p}}$; lengte korte as: HW2=$2\sqrt{\frac{2ln2}{a+b+p}}$
Uitgedrukt in de tweede momenten wordt de formule voor de halfwaardebreedten:

$$\text{HW}=\sqrt{\frac{8ln2}{\frac{M_{yy}+M_{xx}}{2(M_{xx}M_{yy}-M_{xy}^2)}\pm\sqrt{\frac{(M_{yy}-M_{xx})^2+4M_{xy}^2}{4(M_{xx}M_{yy}-M_{xy}^2}}}}=\sqrt{\frac{16ln2(M_{xx}M_{yy}-M_{xy}^2)}{M_{xx}+M_{yy}\pm\sqrt{(M_{xx}-M_yy)^2+4M_{xy}^2}}}$$

$$\boxed{HW=\sqrt{\frac{16ln2(M_{xx}M_{yy}-M_{xy}^2)}{M_{xx}+M_{yy}\pm\sqrt{(M_{xx}-M_yy)^2+4M_{xy}^2}}}} \tag{21}$$

3.7 De positiehoek φ

Omdat in het geroteerde assenstelsel $\mathbf{x'y'}$ de hoofdassen v.d. ellips evenwijdig zijn aan de coördinaatassen, wordt de kleinste hoek (positief $\hookrightarrow$ of negatief $\longleftrightarrow$) tussen de assen van de ellips en de coördinaatassen van het oorspronkelijke assenstelsel **xy** gegeven door θ. Hierbij geldt het volgende: als $\mathbf{a-b>0}$, dan is de lange as v.d. ellips evenwijdig aan de $\mathbf{y'}$-as en geeft θ' de hoek tussen de lange as en de **y**-as. Als $\mathbf{a-b<0}$, dan is de lange as v.d. ellips evenwijdig aan de $\mathbf{x'}$-as en geeft θ de hoek tussen de lange as en de **x**-as (θ inclusief teken).
De positiehoek φ is de kleinste positieve hoek ($0\leq\varphi<180$) tussen de lange as v.d. ellips en de **y**-as. $\mathcal{D}$it betekent dat voor $\mathbf{a-b>0}$ geldt $\varphi=\theta$ of $\varphi=\theta+180°$ en voor $\mathbf{a-b<0}$ $\varphi=\theta+90°$. De positiehoek φ kan dus berekend worden als $\theta=\frac{1}{2}\arctan\frac{\mathbf{2c}}{\mathbf{a-b}}$ bekend is.

Een andere manier om de positiehoek te berekenen is de volgende:
uit $\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$ volgt $\tan 2\theta - \tan 2\theta \tan^2\theta = 2\tan\theta$ **of**
$\tan 2\theta \tan^2\theta + 2\tan\theta - \tan 2\theta = 0$. Hieruit volgt:

$$\tan\theta_{1,2} = \frac{-2\pm\sqrt{4+4\tan^2 2\theta}}{2\tan 2\theta} = \frac{-1\pm\sqrt{1+\frac{4\mathbf{c}^2}{(\mathbf{a}-\mathbf{b})^2}}}{\frac{2\mathbf{c}}{\mathbf{a}-\mathbf{b}}} = \frac{-(\mathbf{a}-\mathbf{b})\pm\sqrt{(\mathbf{a}-\mathbf{b})^2+4\mathbf{c}^2}}{2\mathbf{c}} = \frac{-(\mathbf{a}-\mathbf{b})\pm\mathbf{p}}{2\mathbf{c}}$$

Uit het bovenstaande volgt, hoewel uit $\tan 2\theta = \frac{2\mathbf{c}}{\mathbf{a}-\mathbf{b}}$ slechts *één* waarde voor θ volgt, nl $\theta = \frac{1}{2}\arctan(\frac{2\mathbf{c}}{\mathbf{a}-\mathbf{b}})$, bij overgang op de enkele hoek twee waarden voor θ berekend kunnen worden, nl $\theta_1 = \arctan[\{-(\mathbf{a}-\mathbf{b})+\mathbf{p}\}/2\mathbf{c}]$ en $\theta_2 = \arctan[\{-(\mathbf{a}-\mathbf{b})-\mathbf{p}\}/2\mathbf{c}]$. Aangezien deze twee hoeken van elkaar verschillen kan slechts *één* hiervan gelijk zijn aan de hoek θ verkregen uit $\theta = \frac{1}{2}\arctan(\frac{2\mathbf{c}}{\mathbf{a}-\mathbf{b}})$. Welke van de twee hoeken θ_1 en θ_2 overeenkomt met θ hangt af van de waarden van **a**, **b** en **c**.

Omdat θ_1 en θ_2 beide verkregen zijn uit de formule $\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$ moet gelden:
$\frac{2\tan\theta_1}{1-\tan^2\theta_1} = \frac{2\tan\theta_2}{1-\tan^2\theta_2}$
Dit kan alleen als geldt: $\theta_1 = \theta_2 \pm 90^o$. Dit is alsvolgt in te zien:
Uit de formule $\tan(\alpha\pm\beta) = \frac{\tan\alpha\pm 1}{1\mp\tan\beta}$ volgt dat geldt:

$$lim_{\beta\to 90}\tan(\alpha\pm\beta) = lim_{\beta\to 90}\frac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta} = lim_{\beta\to 90}\frac{\frac{\tan\alpha}{\tan\beta}\pm 1}{\frac{1}{\tan\beta}\mp\tan\alpha} =$$

$$\frac{\pm 1}{\mp\tan\alpha} = -\frac{1}{\tan\alpha}$$

Dus:
$\tan(\alpha\pm\beta) = -\frac{1}{\tan\alpha}$
Hieruit volgt dat met $\theta_1 = \theta_2 \pm 90^o$ geldt:

$$\frac{2\tan\theta_1}{1-\tan^2\theta_1} = \frac{2\tan(\theta_2\pm 90)}{1-\tan^2(\theta_2\pm 90)} \cdot \frac{\frac{2}{\tan\theta_2}}{1-\frac{1}{\tan^2\theta_2}} = \frac{-2\tan\theta_2}{\tan^2\theta_2 - 1} \cdot \frac{2\tan\theta_2}{1-\tan^2\theta-2}$$

<u>Dus:</u>
Als geldt $\theta_1 = \theta_2 \pm 90^o$ kan voldaan worden aan de voorwaarde
$\frac{2\tan\theta_1}{1-\tan^2\theta_1} = \frac{2\tan\theta_2}{1-\tan^2\theta_2}$

3.8 Verband tussen θ, θ_1, θ_2 en φ afhankelijk van de waarden van a, b en c.

Omdat θ, θ_1 en θ_2 berekend worden als $\theta = \frac{1}{2}\arctan(\frac{2c}{a-b})$ en $\theta_{1,2} = \arctan(\frac{-(a-b)\pm p}{2c})$ zullen de verkregen waarden van θ, θ_1 en θ_2 liggen tussen -90^o en $+90^o$ (voor θ zelfs tussen -45^o en $+45^o$). Verder moet bedacht worden dat $p = \sqrt{(a-b)^2+4c^2}$ altijd groter is dan $(a-b)$, zodat geldt $-(a-b)+p > 0$ en $-(a-b)-p < 0$. Voor de 4 gevallen gegeven op blz. 6 geldt dan het volgende:
$\theta = \frac{1}{2}\arctan(\frac{2c}{a-b})$, $\theta_1 = \arctan(\frac{-(a-b)+p}{2c})$ en $\theta_2 = \arctan(\frac{-(a-b)-p}{2c})$.
Daaruit volgt:

	θ	θ_1	θ_2	
a-b>0;c>0	>0	>0	<0	$\rightarrow \theta = \theta_1,\ \theta_1 = \theta_2 + 90^o,\ \phi = \theta = \theta_1$
a-b>0;c<0	<0	<0	>0	$\rightarrow \theta = \theta_1,\ \theta_1 = \theta_2 - 90^o,\ \phi = \theta + 180^o = \theta_1 + 180^o$
a-b<0;c>0	<0	>0	<0	$\rightarrow \theta = \theta_2,\ \theta_1 = \theta_2 + 90^o,\ \phi = \theta + 90^o = \theta_1$
a-b<0;c<0	>0	<0	>0	$\rightarrow \theta = \theta_2,\ \theta_1 = \theta_2 - 90^o,\ \phi = \theta + 90^o = \theta_1 + 180^o$

Uit het bovenstaande volgt dat de positiehoek ϕ gegeven door θ_1 als $\theta_1 > 0^o$ of door $\theta_1 + 180^o$ als $\theta_1 < 0^o$.
De hoek θ_1 wordt gegeven door $\theta_1 = \arctan(\frac{-(a-b)+p}{2c})$ of uitgedrukt in de tweede momenten:

$$\theta_1 = \arctan\left(\frac{\frac{-(M_{yy}-M_{xx})}{2(M_{xx}M_{yy}-M_{xy}^2)} + \sqrt{\frac{(M_{yy}-M_{xx})^2+4M_{xy}^2}{4(M_{xx}M_{yy}-M_{xy}^2)}}}{\frac{-2M_{xy}}{2(M_{xx}M_{yy}-M_{xy}^2)}}\right) \longrightarrow$$

$$\boxed{\theta_1 = \arctan\left(\frac{M_{yy}-M_{xx}-\sqrt{(M_{xx}-M_{yy})^2+4M_{xy}^2}}{2M_{xy}}\right)} \tag{22}$$

Als na een 'least squares' fit de parameters 2θ,x,y,b,c bekend zijn, weten we ook de fouten op deze parameters. De parameters a,b,c worden met hun fouten gebruikt om de HW_1 en HW_2 (Full Widths at Half Maximum) te bepalen plus de fouten.
We herhalen:

$\tan 2\theta = \frac{2c}{a-b} \qquad \longrightarrow \qquad \theta = \frac{1}{2}\arctan\frac{2c}{a-b} \quad HW_1 = 2\sqrt{\frac{2\ln 2}{a+b-p}}$

met $p = \sqrt{(a-b)^2 + 4c^2}$

$HW_2 = 2\sqrt{\frac{2\ln 2}{a+b+p}}$
Nu nog het resultaat van θ:

$\Delta\theta = \frac{1}{p^2}\sqrt{c^2(\Delta b^2 + \Delta a^2) + (a-b)^2\Delta c^2}$
Het resultaat van HW_1:

$\Delta HW_1 = \frac{\sqrt{2\ln 2}}{(a+b-p)^{\frac{3}{2}}}\ \frac{1}{p}\ \sqrt{(p-(a-b))^2\Delta a^2 + (p-(a+b))^2\Delta b^2 + (4c)^2\Delta c^2}$
Tot slot het resultaat van HW_2

$\Delta HW_2 = \frac{\sqrt{2\ln 2}}{(a+b+p)^{\frac{3}{2}}}\ \frac{1}{p}\ \sqrt{[p+(a-b)]^2\Delta a^2 + [p-(a-b)]^2\Delta b^2 + (4c)^2\Delta c^2}$

Gegeven is reeds:
$HW_1 = 2\sqrt{\frac{2\ln 2}{a+b-p}}$

$HW_2 = 2\sqrt{\frac{2\ln 2}{a+b+p}}$
$\tan(2\theta) = \frac{2c}{a-b}$
$\left(p = \sqrt{(a-b)^2 + 4c^2}\right)$

Uit deze betrekkingen willen we uitdrukkingen afleiden voor a, b en c in termen van HW_1, HW_2 en θ.

Uitwerken geeft de volgende verbanden:

$$\boxed{a = 2\ln 2\left[\frac{1}{HW_1^2} + \frac{1}{HW_2^2} - \left(\frac{1}{HW_1^2} - \frac{1}{HW_2^2}\right)\cos(2\theta)\right]} \tag{23}$$

$c = \frac{1}{2}\tan(2\theta)\cdot(a-b) = \frac{1}{2}\tan(2\theta)\cdot -4\ln 2\left(\frac{1}{HW_1^2} - \frac{1}{HW_2^2}\right)\cos(2\theta)$

$= -2\ln 2\left(\frac{1}{HW_1^2} - \frac{1}{HW_2^2}\right)\sin(2\theta)$

$$\boxed{c = -2\ln 2\left(\frac{1}{HW_1^2} - \frac{1}{HW_2^2}\right)\sin(2\theta)} \tag{24}$$

We kunnen de uitdrukkingen voor a en b nog verder vereenvoudigen door de observatie:
$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^(\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$
Zodat $1 + \cos(2\alpha) = 2\cos^2\alpha$ en $1 - \cos(2\alpha) = 2\sin^2\alpha$.
Nemen we de uitdrukkingen voor a en b en gebruiken we bovenstaande formules dan krijgen we:

$$\boxed{a = 4\ln 2[\frac{\sin^2\theta}{HW_1^2} + \frac{\cos^2\theta}{HW_2^2}]} \tag{25}$$

$$\boxed{b = 4\ln 2[\frac{\cos^2\theta}{HW_1^2} + \frac{\sin^2\theta}{HW_2^2}]} \tag{26}$$

Contents