Tentamen Dynamica van melkwegstelsels

26 juni 2007, 10:00–13:00 uur

Vermeldt naam en jaar van eerste inschrijving en inschrijvingsnummer op het eerste vel en in ieder geval naam op de volgende vellen papier.

Opm. *Bij alle vragen is het zo, dat als alleen een gedeelte goed beantwoord is, de vraag voor een evenredig deel goedgerekend wordt.*

1. Met de collisionless Boltzmann equation kunnen de bewegingsvergelijkingen van een sterbaan worden opgeschreven. Deze geven bij oplossing aanleiding tot constanten, die integrals of motion (bewegingsintegralen) worden genoemd. Wat zijn dit, waarom heten ze zo en hoeveel zijn er maximaal? Geef een voorbeeld van zo'n integral of motion.
Wat is een isolerende integraal? Hoeveel zijn er daarvan in een sferisch symmetrische potentiaal? Hoeveel isolerende integralen zijn er in een as-symmetrische potentiaal als voor de schijf van een (ons) melkwegstelsel. Wat verstaat men onder een "zero velocity curve"? Wat is het "third integral problem"?
Wat is het theorema van Jeans? Wat heeft Lynden-Bell hieraan toegevoegd?

2. Beschrijf en leg uit wat de volgende begrippen zijn (ik gebruik de Engelse namen):

- Violent relaxation
- Dynamical friction
- Epicyclic frequency
- Asymmetric drift
- Toomre Q
- Inner Lindblad resonance
- Isothermal sheet
- Tully-Fisher and Faber-Jackson relations
- Maximum disk hypothesis

3. *Deze vraag is van Bob Sanders. Beantwoord deze op apart papier en <u>in het Engels</u>.*
What are the four principal families of periodic orbits in the principal plane of a disk having a weak -non-rotating bar-like distortion ($\cos 2\phi$)? How do these families change structure when the bar rotates?
If you wish to build a self-consistent model for a bar, which orbit family would you choose to populate? Which families are important for gas flow?
Sketch an $x, \dot{x}$ surface of section at an energy such that all orbits are within the Inner Lindblad Resonance. Locate and lable the principal periodic orbits on this sketch.

Op de volgende pagina's de belangrijkste formules in een willekeurige volgorde.

$$\frac{\partial}{\partial R}(\nu\langle V_{\rm R}^2\rangle)+\frac{\nu}{R}\{\langle V_{\rm R}^2\rangle-V_{\rm t}^2-\langle(V_\theta-V_{\rm t})^2\rangle\}+\frac{\partial}{\partial z}(\nu\langle V_{\rm R}V_{\rm z}\rangle)=\nu K_{\rm R}$$

$$\kappa=2\{-B(A-B)\}^{1/2}\quad;\quad\Omega_{\rm p}=\Omega_{\rm rot}(R)-\frac{\kappa}{2}\quad;\quad\lambda=(4\pi G\rho_\circ)^{1/2}.$$

$$\frac{\partial\nu}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_i}\int v_i f\ d^3v-\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}\int f(v_i)]_{-\infty}^{\infty}\,d^2v_{\neq i}=0$$

$$\sigma_{\rm R}(R)=\sigma_\circ\exp\left(-R/h\right)\quad;\quad M=2\pi h^2\sigma_\circ$$

$$\Phi(\lambda,\mu,\nu)=-\frac{F(\lambda)}{(\lambda-\mu)(\lambda-\nu)}-\frac{F(\mu)}{(\mu-\nu)(\mu-\lambda)}-\frac{F(\nu)}{(\nu-\lambda)(\nu-\mu)}$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\tfrac{1}{2}I_{jk}\right)=\int x_k\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\bar{v}_j\right)\quad;\quad K_{ij}=\int\rho\bar{v}_i.\bar{v}_j d^3x+\tfrac{1}{2}\int\rho\sigma_{ij}^2 d^3x=T_{ij}+\tfrac{1}{2}\Pi_{ij}$$

$$\rho(z)=\frac{\langle V_{\rm z}^2\rangle}{2\pi Gz_\circ^2}\,{\rm sech}^2\left(\frac{z}{z_\circ}\right)\quad;\quad\langle V_{\rm z}^2\rangle=\pi G\sigma z_\circ\quad;\quad K_{\rm z}=-2\frac{\langle V_{\rm z}^2\rangle}{z_\circ}\tanh\left(\frac{z}{z_\circ}\right)$$

$$R_\circ=\left(\frac{4\pi G\rho_\circ}{9\langle V^2\rangle}\right)^{-1/2}\quad;\quad\langle V^2\rangle^{1/2}\propto\frac{\rho_\circ M(R_{\rm t})}{f\left(R_{\rm t}/R_\circ\right)g\left(R_{\rm t}/R_\circ\right)}$$

$$V_{\rm circ}(R)=\left[V_{\rm disk}^2(R)+V_{\rm bulge}^2(R)+V_{\rm halo}^2(R)\right]^{1/2}$$

$$-K_{\rm R}=\frac{V_{\rm t}^2}{R}-\langle V_{\rm R}^2\rangle\left[\frac{\partial}{\partial R}(\ln\nu\langle V_{\rm R}^2\rangle)+\frac{1}{R}\left\{1-\frac{\langle(V_\theta-V_{\rm t})^2\rangle}{\langle V_{\rm R}^2\rangle}\right\}\right]+\langle V_{\rm R}V_{\rm z}\rangle\frac{\partial}{\partial z}(\ln\nu\langle V_{\rm R}V_{\rm z}\rangle)$$

$$V_{\rm rot}^2-V_{\rm t}^2=-\langle V_{\rm R}^2\rangle\left\{R\frac{\partial}{\partial R}\ln\nu+R\frac{\partial}{\partial R}\ln\langle V_{\rm R}^2\rangle+\left[1-\frac{B}{B-A}\right]\right\}.$$

$$\frac{\langle V_\theta^2\rangle}{\langle V_{\rm R}^2\rangle}=\frac{-B}{(A-B)}\quad;\quad Q=\frac{\langle V_{\rm R}^2\rangle^{1/2}\kappa}{3.36G\sigma}\quad;\quad Y=V_{\rm rot}\left(\frac{h}{GM_{\rm disk}}\right)^{1/2}\gtrsim1.1$$

$$4.74\mu=-\omega_\circ-\tfrac{1}{2}\left(\frac{d\omega}{dR}\right)_{R_\circ}R_\circ-\tfrac{1}{2}R_\circ\left(\frac{d\omega}{dR}\right)_{R_\circ}\cos2l\equiv B+A\cos2l$$

$$K_{\rm R}(R,z)=-2\pi G\int_0^\infty\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty ukJ_1(kR)J_0(ku)\rho(u,v)e^{-k|z-v|}dv\,du\,dk$$

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}\equiv\nabla^2\Phi=4\pi G\rho(x,y,z)\quad;\quad\frac{\partial K_{\rm R}}{\partial R}+\frac{K_{\rm R}}{R}+\frac{\partial K_{\rm z}}{\partial z}=-4\pi G\rho(R,z)$$

$$V_{\rm rad}=R_\circ\left(\frac{V(R)}{R}-\frac{V_\circ}{R_\circ}\right)\sin l\quad;\quad T=R_\circ\left(\frac{V(R)}{R}-\frac{V_\circ}{R_\circ}\right)\cos l-\frac{r}{R}V(R)$$

$$t_{\rm relax} \sim \left(\frac{R^3}{GM}\right)^{1/2} \frac{N}{8\ln N} \quad ; \quad \ddot{R} = -\frac{\partial \Phi_{\rm eff}}{\partial R} \quad ; \quad \ddot{z} = -\frac{\partial \Phi_{\rm eff}}{\partial z}$$

$$A = \frac{1}{2}\left[\frac{V_\circ}{R_\circ} - \left(\frac{dV}{dR}\right)_{R_\circ}\right] \quad ; \quad B = -\frac{1}{2}\left[\frac{V_\circ}{R_\circ} + \left(\frac{dV}{dR}\right)_{R_\circ}\right]$$

$$\frac{x^2}{\tau+\alpha} + \frac{y^2}{\tau+\beta} + \frac{z^2}{\tau+\gamma} = 1$$

$$L \propto V_{\rm max}^4 \quad ; \quad L \propto \langle V^2\rangle^2 \quad ; \quad R \propto \sigma^{1.4\pm0.15} I^{-0.9\pm0.1}$$

$$V_{\rm R}\frac{\partial f}{\partial R} + V_{\rm z}\frac{\partial f}{\partial z} - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial R} - \frac{V_\theta^2}{R}\right)\frac{\partial f}{\partial V_{\rm R}} - \frac{V_{\rm R}V_\theta}{R}\frac{\partial f}{\partial V_\theta} - \frac{\partial \Phi}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial V_{\rm z}} = 0$$

$$\Phi(R,z) = -2\pi G\int_0^\infty \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty uJ_0(kR)J_0(ku)\rho(u,v)e^{-k|z-v|}dv\,du\,dk$$

$$V_{\rm rot}^2(R) = \pi G h\sigma_\circ \left(\frac{R}{h}\right)^2 [I_\circ K_0 - I_1 K_1]$$

$$u\frac{\partial f}{\partial x} + v\frac{\partial f}{\partial y} + w\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial \Phi}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial \Phi}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial v} - \frac{\partial \Phi}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial w} = 0$$

$$r_{\rm tidal} \sim R\left(\frac{m}{3M}\right)^{1/3} \quad ; \quad \rho(R) = \frac{\langle V^2\rangle}{2\pi G}R^{-2} \quad \text{(large R)}$$

$$\vec{g}\left(\frac{g}{a_\circ}\right)\left[1 + \left(\frac{g}{a_\circ}\right)^2\right]^{-1/2} = \vec{g}_{\rm N}$$

$$W_{jk} = -\int \rho x_j \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} d^3x \quad ; \quad \tfrac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}I_{ij} = 2T_{ij} + \Pi_{ij} + W_{ij}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}(\nu\langle V_{\rm z}^2\rangle) + \frac{\nu\langle V_{\rm R}V_{\rm z}\rangle}{R} + \frac{\partial}{\partial R}(\nu\langle V_{\rm R}V_{\rm z}\rangle) = \nu K_{\rm z}$$

$$V_{\rm rad} = -\tfrac{1}{2}R_\circ\left(\frac{d\omega}{dR}\right)_{R_\circ} r\sin 2l \equiv Ar\sin 2l$$

$$\tilde{\rho}(k,z) = \int_0^\infty uJ_0(ku)\rho(u,z)du \quad \rho(u,z) = \int_0^\infty kJ_0(kR)\tilde{\rho}(k,z)dk$$

$$\Phi_{\rm eff} = \Phi(R,z) + \frac{L_{\rm z}^2}{2R^2} \quad ; \quad E = \tfrac{1}{2}\dot{R}^2 + \tfrac{1}{2}\dot{z}^2 + \Phi_{\rm eff}(R,z)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial R^2} + \frac{1}{R}\frac{\partial \Phi}{\partial R} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 4\pi G\rho(R,z)$$