INLEIDING STERRENKUNDE

College 6. Eindstadia van sterren.

Evolutie na de rode reuzen-fase.

Als de ster aan het eind van de *Reuzen-tak* is gekomen, vindt er alleen *Waterstof-schilverbranding* plaats.

Het centrale deel trekt echter samen onder de eigen zwaartekracht, waardoor de temperatuur weer gaat stijgen.
Als de temperatuur hoog genoeg is geworden ($\sim 10^8$ K) zal er *Helium-verbranding* kunnen beginnen.

Twee helium-kernen kunnen samen een beryllium-8 kern vormen. Maar dit is geen stabiel isotoop.

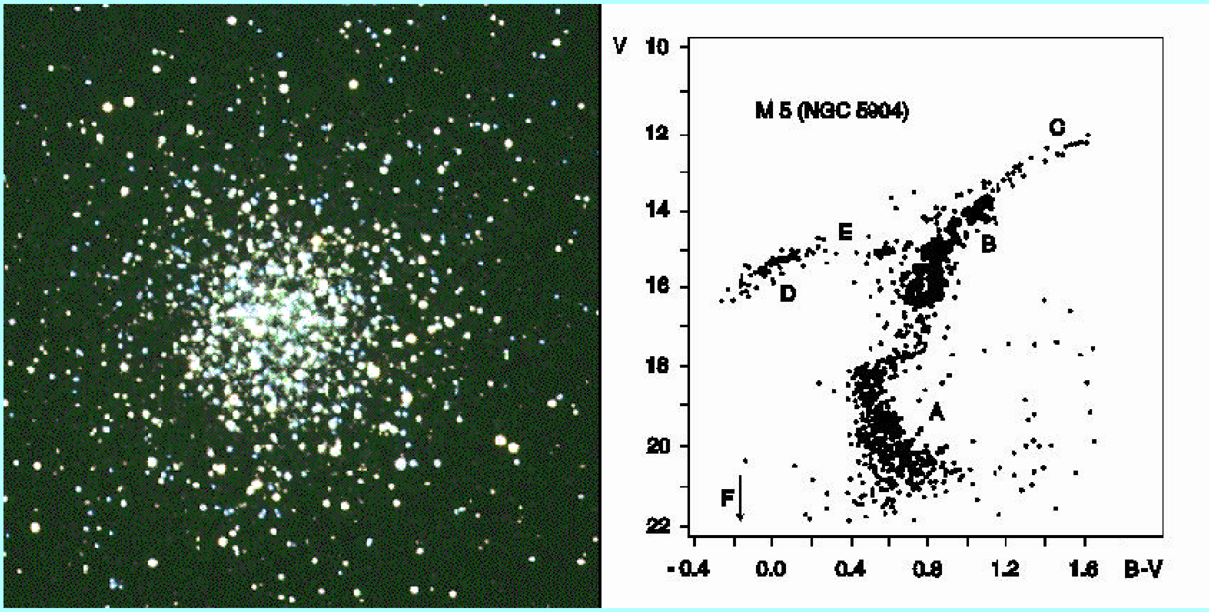
Echter in zo'n ster-kern bestaat er een toestand, waarvan de vervaltijd relatief lang is (ongeveer 3×10^{-16} sec).

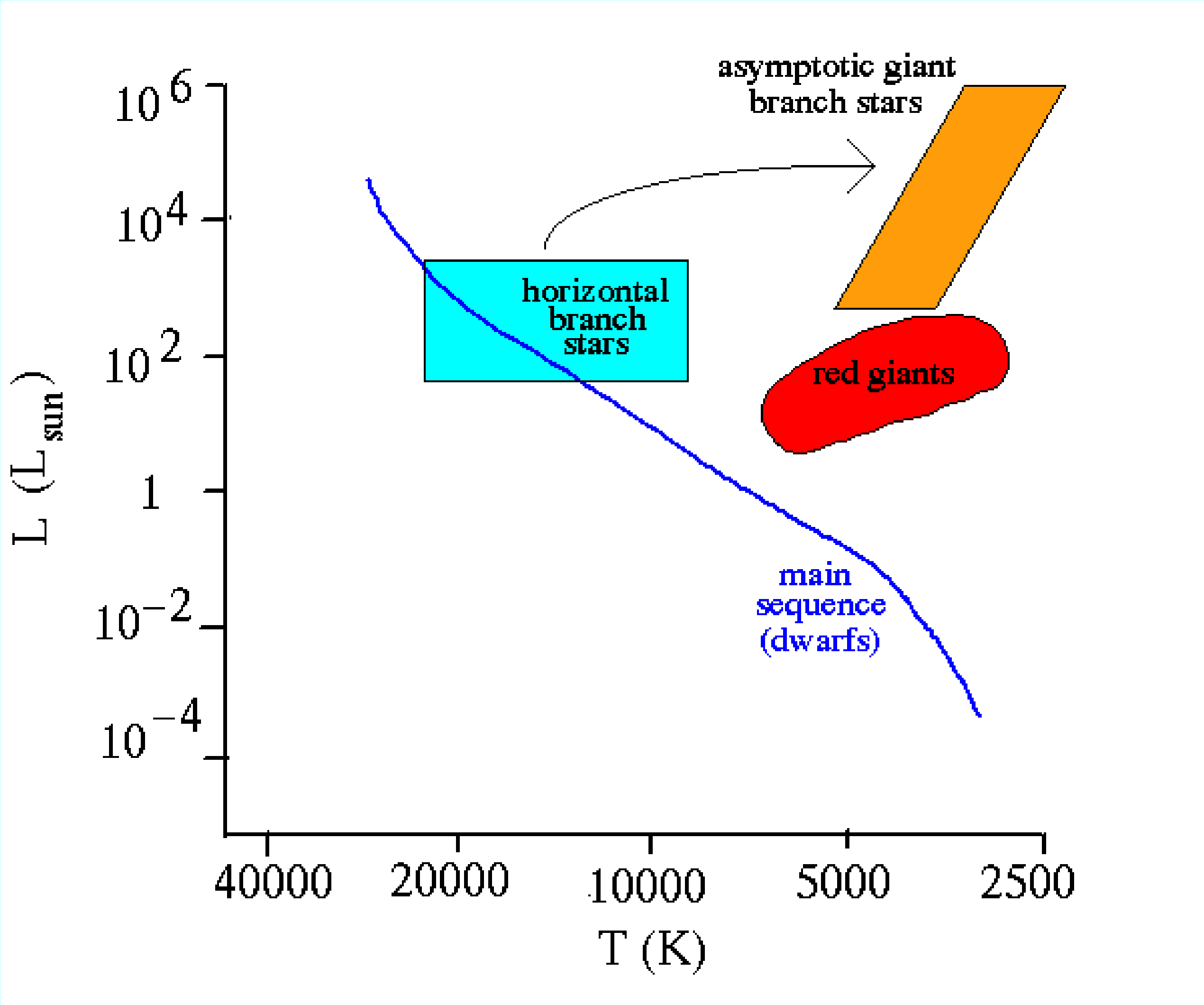
Daardoor wordt een nieuwe helium-kern ingevangen en kan koolstof-12 worden gevormd. In de praktijk zal een deel van de koolstof "doorverbranden" tot zuurstof.

$$
\begin{aligned}
{}^{4}\mathrm{He} + {}^{4}\mathrm{He} &\leftrightarrow {}^{8}\mathrm{Be} + \gamma \\
{}^{8}\mathrm{Be} + {}^{4}\mathrm{He} &\rightarrow {}^{12}\mathrm{C} + \gamma \\
{}^{12}\mathrm{C} + {}^{4}\mathrm{He} &\rightarrow {}^{16}\mathrm{O} + \gamma
\end{aligned}
$$

De sterren komen dan op de *Horizontale Tak* en klimmen tijdens de *Helium-verbranding* terug omhoog langs de *Asymptotische Tak*.

Dit heel goed te zien in de H-R diagrammen van bolhopen.


M 5 (NGC 5904)
V
B-V
A
B
C
D
E
F


asymptotic giant branch stars
horizontal branch stars
red giants
main sequence (dwarfs)
L (L_{sun})
T (K)
10^6
10^4
10^2
1
10^{-2}
10^{-4}
40000
20000
10000
5000
2500

In bolhopen gaat de horizontale tak ver naar het blauw. Dat komt, omdat deze sterren heel weinig *zware elementen* hebben.

Hiermee wordt bedoeld alle elementen zwaarder dan helium.

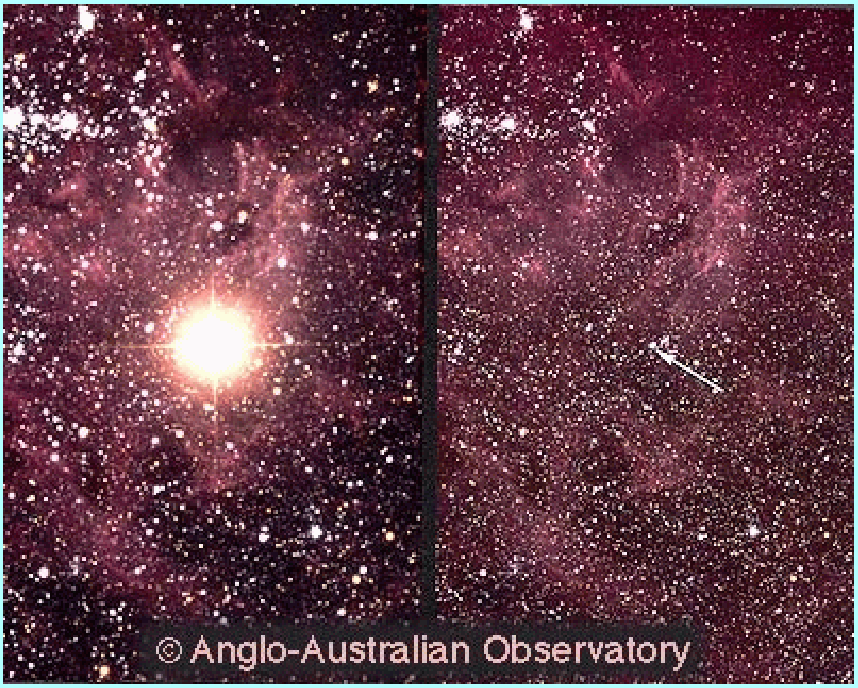
Sterren in de buurt van de zon hebben veel meer zware elementen (in de zon ongeveer 2% van het totaal en dan wel voornamelijk in koolstof, stikstof en zuurstof).

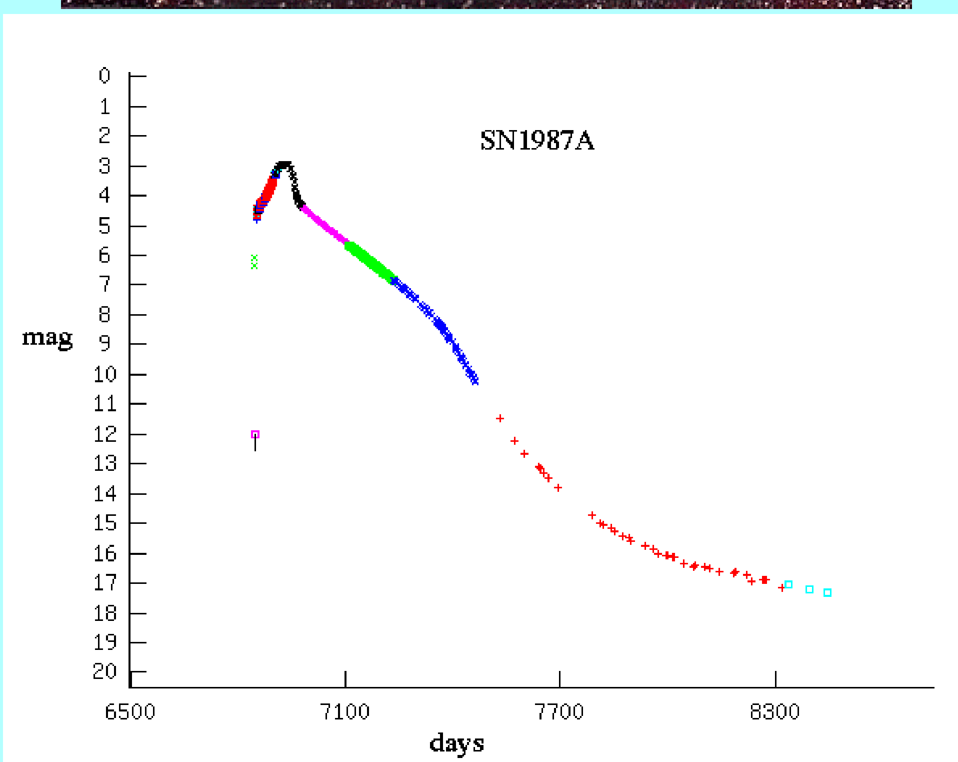
Voor zulke sterren ligt de hele horizontale tak bijna precies op de Reuzentak. Men noemt het de *Clump*.

Na de Helium-verbranding kan hetzelfde proces weer optreden. De kern valt samen en de temperatuur stijgt. Eromheen vindt schilverbranding van helium en daarbuiten waterstof plaats.

Als de ster zwaar genoeg is kan *Koolstof-verbranding* plaatsvinden. Dit is echter zo intensief, dat de ster zich opblaast als een *Supernova*.

De meest spectaculaire supernova is *SN 1987A* in de *Grote Magelhaense Wolk* (een begeleider van ons eigen Melkwegstelsel), die in februari 1987 met het blote oog te zien was.

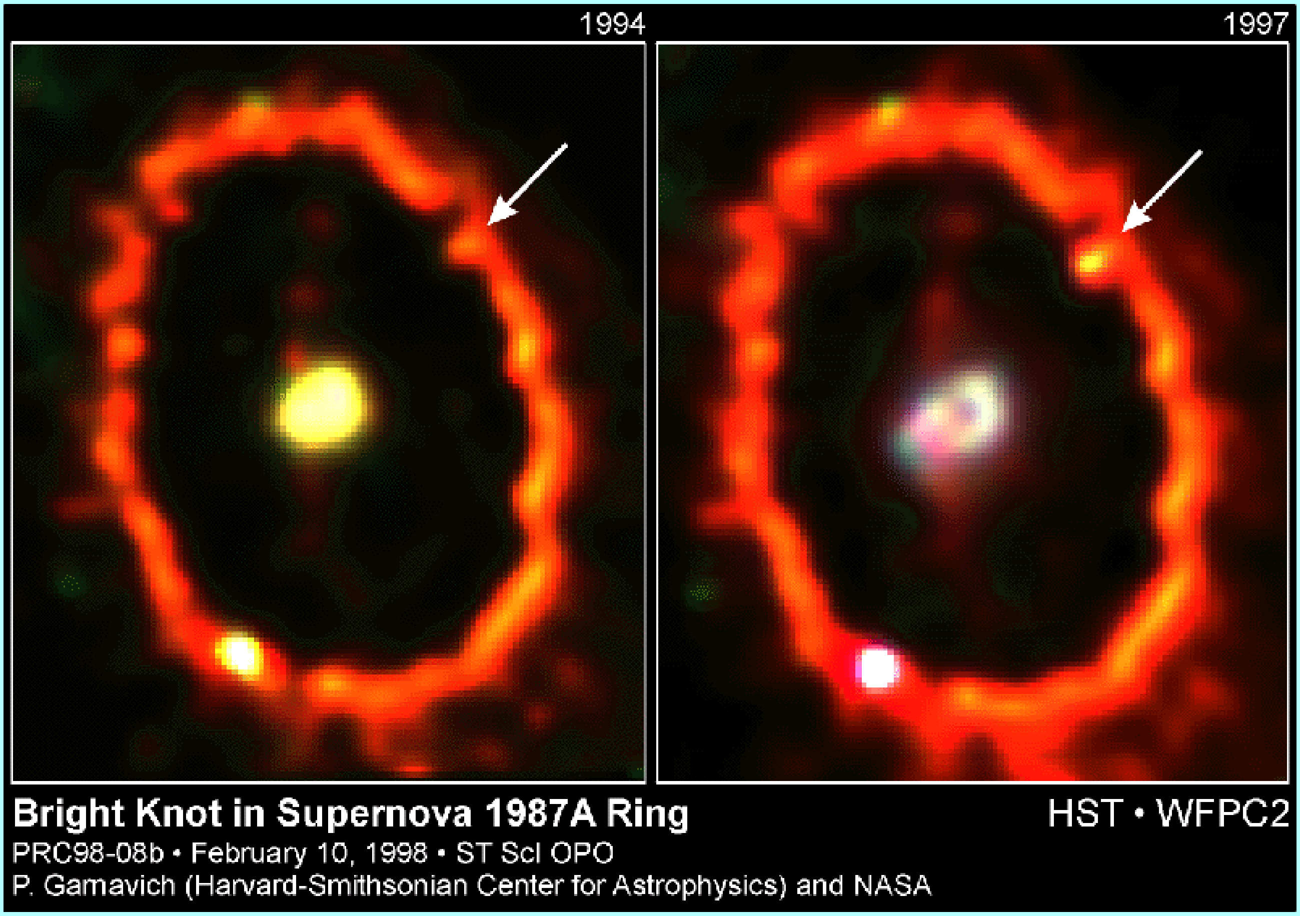




Een supernova kan in het maximum een absolute magnitude van -20 bereiken.

De buitendelen worden met snelheden van enkele duizenden km/sec uitgestoten.

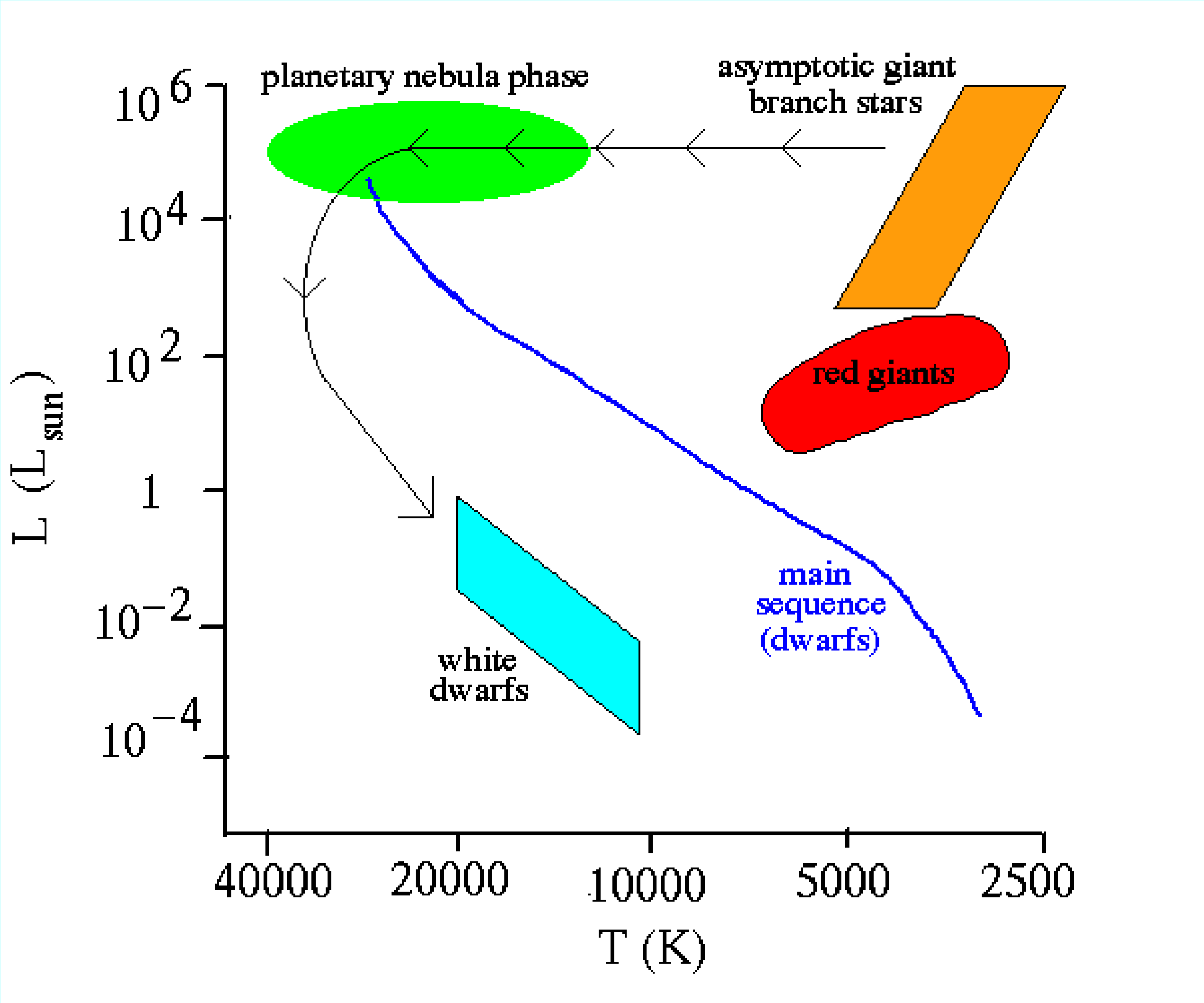
Hieronder SN1987A zo'n 7 en 10 jaar na de explosie opgenomen met de *Hubble Space Telescope*.



Uiteindelijk blijft een expanderende gasbol over, zoals de *Krab-nevel*, die het overblijfsel is van een supernova explosie die in 1054 is plaatsvond. De afstand is ongeveer 2 kpc.

Sterren, die niet zwaar genoeg zijn, worden nooit een supernova.

Ze stoten hun buitenste lagen uit en worden een *Planetaire Nevel*.



Een mooi voorbeeld daarvan is de *Helix-nevel*.

Van zulke sterren blijft een kompakt object over, een *Witte Dwerg*, die langzaam uitdooft.

Van zwaardere sterren (na een supernova explosie) blijft een *Neutronenster* of een *Zwart Gat* over.

Degeratiedruk.

Als er geen energie productie meer is, wordt de samentrekking niet meer tegengehouden. Dit gaat door totdat de materie *gedegenereerd* raakt. Dan is er *degeneratiedruk*.

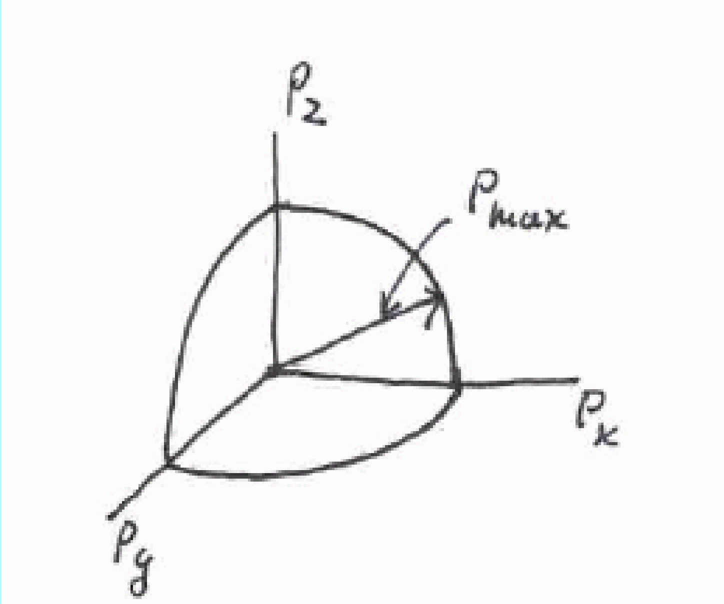
Volgens Heisenberg geldt de *onzekerheids-relatie*

$$\vec{\Delta p}\Delta V \approx h^3$$

Hier staan $\vec{p}$ voor de impuls en V voor een volume en is h de Planck-constante.

Dus $\vec{\Delta p}$ is een volume in de impuls-ruimte en ΔV in de echte ruimte.

Stel, dat er een bol met straal P_{max} beschikbaar is.



Dat volume is dan $(4/3)\pi p_{\rm max}^3$.

Het aantal mogelijke ruimtetjes, waarin deeltjes ononderscheidbaar zijn is dan

$$\frac{4}{3}\pi\frac{p_{\rm max}^3}{\vec{\Delta p}} = \frac{3\pi p_{\rm max}^3}{4h^3}\Delta V$$

Maar volgens het *Uitsluitings-principe van Pauli* kunnen twee deeltjes nooit in dezelfde toestand zijn.

We zullen het hebben over electronen of neutronen en die hebben een *spin*, die omhoog of omlaag kan staan.

Dus in elk ruimtetje ΔV mogen maar twee deeltjes aanwezig zijn. Als dus n het aantal deeltjes per volume-eenheid is, dan

$$n = \frac{2 \times \text{aantal mogelijkheden}}{\Delta V} = \frac{8\pi}{3h^3} p_{\text{max}}^3$$

Dus

$$p_{\text{max}} = h \left(\frac{3n}{8\pi} \right)^{1/3}$$

Niet-relativistisch.

Van elk deeltje met massa m is de energie

$$E = \frac{p^2}{2m}$$

Dus de gemiddelde energie van de deeltjes is

$$\begin{aligned} \langle E \rangle_{\text{nr}} &= \langle \frac{p^2}{2m} \rangle \\ &= \int_0^{p_{\text{max}}} \frac{p^2}{2m} 4\pi p^2 dp \left[\int_0^{p_{\text{max}}} 4\pi p^2 dp \right]^{-1} \\ &= \frac{3}{5} \frac{p_{\text{max}}^2}{2m} \end{aligned}$$

Relativistisch.

Van elk deeltje met massa m is de energie

$$E^2 = p^2c^2 + m_\circ^2 c^4$$

In het zeer relativistische geval geldt $pc \gg m_\circ c^2$, dus $E = pc$

Dus de gemiddelde energie van de deeltjes is

$$\begin{aligned} \langle E \rangle_{\text{rel}} &= \langle pc \rangle \\ &= \int_0^{p_{\text{max}}} pc 4\pi p^2 dp \left[\int_0^{p_{\text{max}}} 4\pi p^2 dp \right]^{-1} \\ &= \frac{3c}{4} p_{\text{max}} \end{aligned}$$

In een gas is de druk $P = (2/3)n\langle E \rangle$, dus

$$P_{\text{nr}} = \frac{8\pi}{15} \frac{h^2}{m} \left(\frac{3n}{8\pi} \right)^{5/3} = \frac{A}{m} n^{5/3} \propto \rho^{5/3}$$

$$P_{\text{rel}} = \frac{hc}{2} \left(\frac{3}{8\pi} \right)^{1/3} n^{4/3} = A_{\text{rel}} n^{4/3} \propto \rho^{4/3}$$

In deze vergelijkingen ontbreekt de temperatuur! Dit wil zeggen, dat er geen verband meer is tussen T en de kinetische energie.

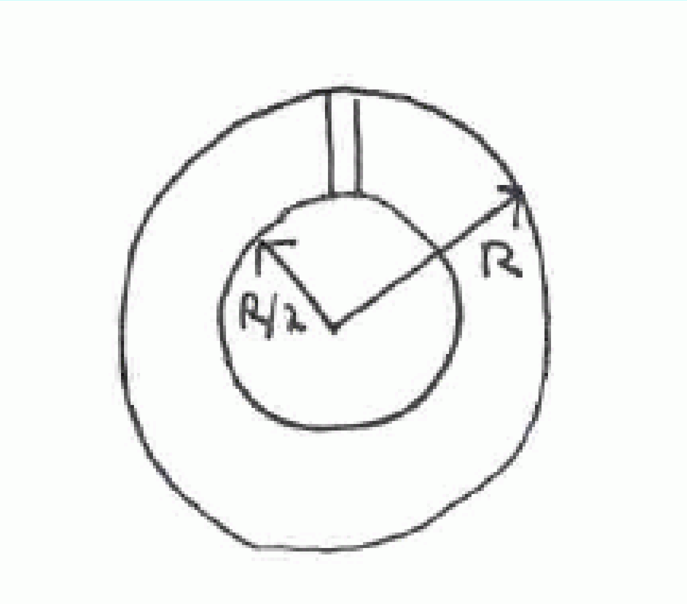
Witte dwergen.

In een witte dwerg zijn de electronen gedegenereerd. Dus voor m hebben we de massa van het electron m_e en $n = \rho/m_\mathrm{p}$, waar m_p de massa van het proton is.

In het niet-relativistische geval krijgen we dus

$$P = A_\mathrm{e}\rho^{5/3} \;\text{ met }\; A_\mathrm{e} = \frac{A}{m_\mathrm{e}} m_\mathrm{p}^{-5/3}$$

Kijk nu op simplistische manier naar de structuur van de ster.



De druk halverwege de straal R is het gewicht van de bovenstaande kolom

$$P(\tfrac{1}{2}R) = \rho \times \tfrac{1}{2}R \times \frac{GM(\frac{1}{2}R)}{\left(\frac{1}{2}R\right)^2}$$

Hier is $M(\frac{1}{2}R)$ de massa binnen $\frac{1}{2}R$ en dat is $M/8$ als M de totale massa is en de dichtheid constant. Dan

$$P(\tfrac{1}{2}R) = \frac{GM\rho}{4R}$$

Dus neem de gemiddelde druk als

$$\bar{P} \sim G\bar{\rho}\frac{M}{R}$$

Met $M = (4/3)\pi\bar{\rho}R^3$ krijgen we dan

$$P = GM^{2/3}\sqrt{\frac{4\pi}{3}}\bar{\rho}^{4/3}$$

Dan

$$\bar{\rho} = \frac{4\pi}{3}\frac{G}{A_\mathrm{e}}M^2$$

$$R = \left(\frac{3}{4\pi}\right)^{2/3}\frac{A_\mathrm{e}}{G}M^{-1/3}$$

Voor een witte dwerg met een massa van 0.5 $M_\odot$ geeft dit $\bar{\rho} \approx 5 \times 10^6$ g cm^{-3} en $R \approx 5 \times 10^3$ km.

Als de massa groter wordt, wordt ρ ook groter en dus ook p_{max}. Dus we komen steeds dichter bij het relativistische geval. Uiteindelijk $p_{\text{max}} c \gg m_\circ c^2$ en

$$P = A_{\text{rel}} n^{4/3} = A_{\text{rel}} m_{\text{p}}^{-4/3} \rho^{4/3}$$

Dus

$$A_{\text{rel}} m_{\text{p}}^{-4/3} \rho^{4/3} = G M^{2/3} \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \rho^{4/3}$$

Hieruit is ρ op te lossen en dus M te bepalen. Dit is een maximum massa, want de electronen hebben alle snelheden tussen 0 en de lichtsnelheid beschikbaar en meer is er niet. Dan

$$M_{\text{crit}} = \left(\frac{A_{\text{rel}}}{G}\right)^{3/2} \sqrt{\frac{3}{4\pi}} m_{\text{p}}^{-2} = 1.75 M_\odot$$

Een goede berekening geeft $M_{\text{crit}} = 1.44 M_\odot$.

Neutronensterren.

Als de massa van de ster oorspronkelijk boven ongeveer 5 $M_\odot$ was en de supernova ontploffing voorbij is, blijft een samentrekkend objekt over met een massa te groot om een witte dwerg te worden.

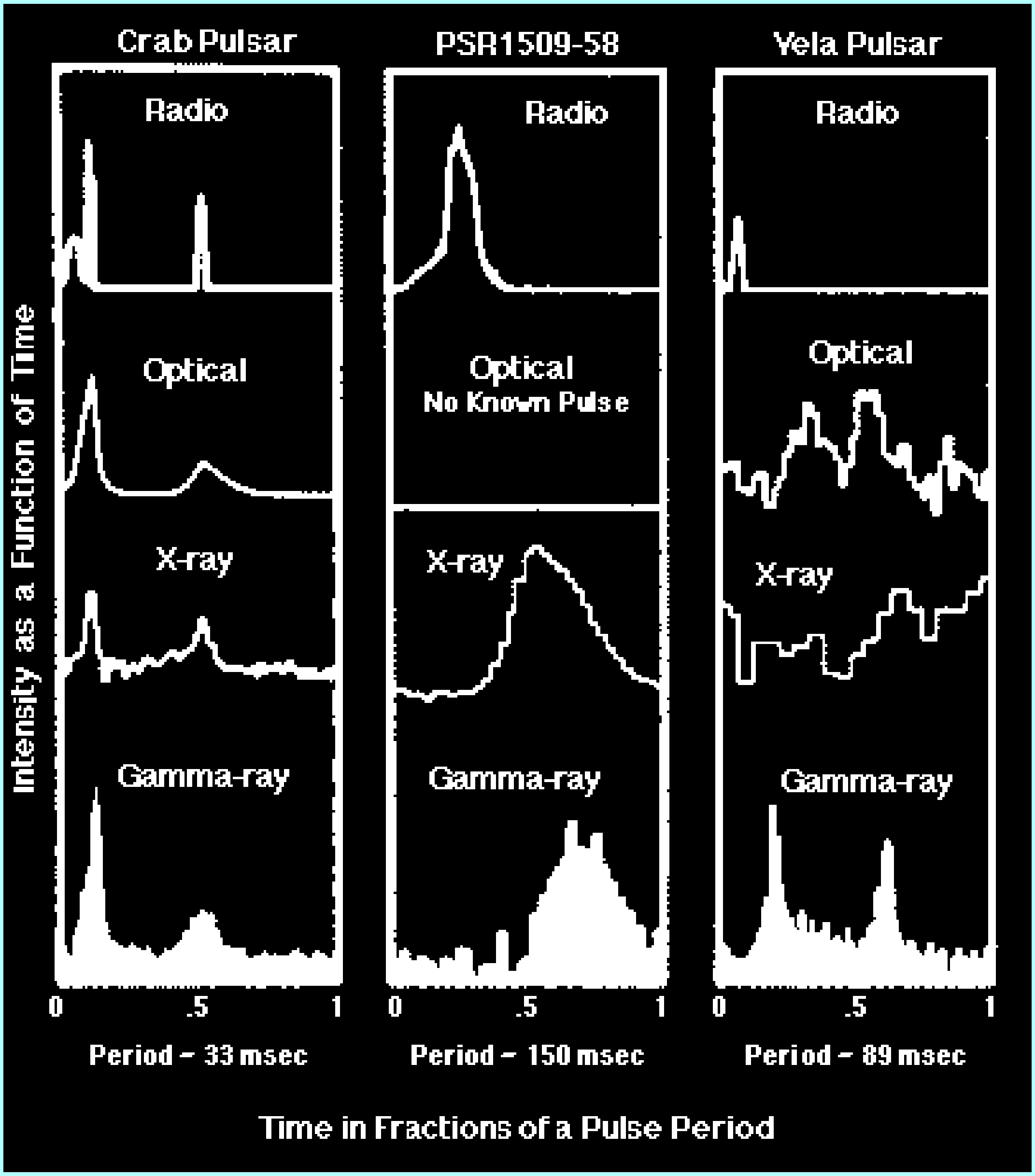
Dus degeneratiedruk van de electronen kan de samentrekking niet stoppen.

De protonen en electronen gaan dan samen (worden als het ware in elkaar gedrukt) en de resterende neutronen worden nu relativistisch.

Deze *Neutronensterren* hebben voor een massa van $1.5 M_\odot$ een straal $R \approx 5$ km en een dichtheid $\rho \approx 10^{15}$ g cm^{-3}.

Door de samentrekking zijn deze sterren heel snel gaan draaien. Als ze langs hun magnetische as (radio)straling uitzenden zien we dit als een *Pulsar*.

De periode is van seconden tot duizenden van seconden.



We kunnen de dichtheid van een pulsar ook schatten uit de middelpuntvliedende kracht. Aan de equator van de pulsar geldt

$$\frac{V^2}{R} = \frac{GM}{R^2} \quad \text{of} \quad V = \sqrt{\frac{GM}{R}}$$

De periode is $P = 2\pi R/V$ en met $M = \frac{4\pi}{3}R^3\rho$ krijgen we dan

$$P = \frac{2\pi R^{3/2}}{\sqrt{GM}} = \frac{2\pi R^{3/2}}{\sqrt{\frac{4\pi}{3}GR^3\rho}} = 3.8 \times 10^5 \rho^{-1/2}$$

met P in seconden en ρ in kg cm^{-3}.

Voor een periode P van 2 ms volgt een dichtheid ρ van $4{\times}10^{16}$ kg cm^{-3}.

De periode van pulsars neemt af. Dit komt, omdat de pulsar energie uitstraalt en energie in de pulsar is vooral in de vorm van rotatie.

Voor een draaiende bol met massa M, straal R en hoeksnelheid ω is de rotatie energie

$$E_{\text{rot}} = \frac{1}{5}MR^2\omega^2$$

De periode is $P = 2\pi/\omega$ en de afname is dan

$$\frac{dE_{\mathrm{rot}}}{dt} = \frac{4}{5}\pi^2 MR^2 \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{P^2}\right) = -\frac{8}{5}\pi^2 \frac{MR^2}{P^3}\frac{dP}{dt}$$

Stel, dat de uitgestraalde energie per seconde van de pulsar $L = -dE_{\mathrm{rot}}/dt$. Dan

$$\dot{P} = \frac{dP}{dt} = \frac{5}{8\pi^2}\frac{LP^3}{MR^2}$$

Voor bijvoorbeeld de Krab-pulsar geldt $P = 0.03$ sec en $L \approx 10^{31}$ Watt. Met onze eerdere waarden van $M \approx 1.5\ M_\odot$ en $R \approx 5$ km volgt dan $\dot{P} \approx 2 \times 10^{-13}$ sec/sec. Dit is ook ongeveer waargenomen.

Ook de levensduur van de pulsar kunnen we schatten als

$$t = \frac{P}{\dot{P}}$$

Voor de Krab-pulsar vinden we dan $\approx 10^{11}$ sec of $\approx 4 \times 10^3$ jaar.

Zwarte gaten.

Ook voor de neutronensterren is een maximale massa, alhoewel niet helemaal goed bekend. Men vermoedt ergens in de buurt van 5 $M_\odot$.

Niets kan de samentrekking dan verder tegenhouden en we krijgen een *Zwart Gat*.

Voor een lichaam met massa M en straal R is de ontsnappingssnelheid aan het oppervlak $\sqrt{2GM/R}$. Als die gelijk wordt aan de lichtsnelheid krijgen we de *Schwarzschild-straal*

$$R_{\mathrm{Sch}} = \frac{2GM}{c^2}$$

Voor een massa van 1 $M_\odot$ is dit 2.7 km.

Nucleosynthese.

Bij de supernova explosie en de vorming van planetaire nevels wordt materie in de ruimte geworpen, dat meer zware elementen heeft door de kernreakties.

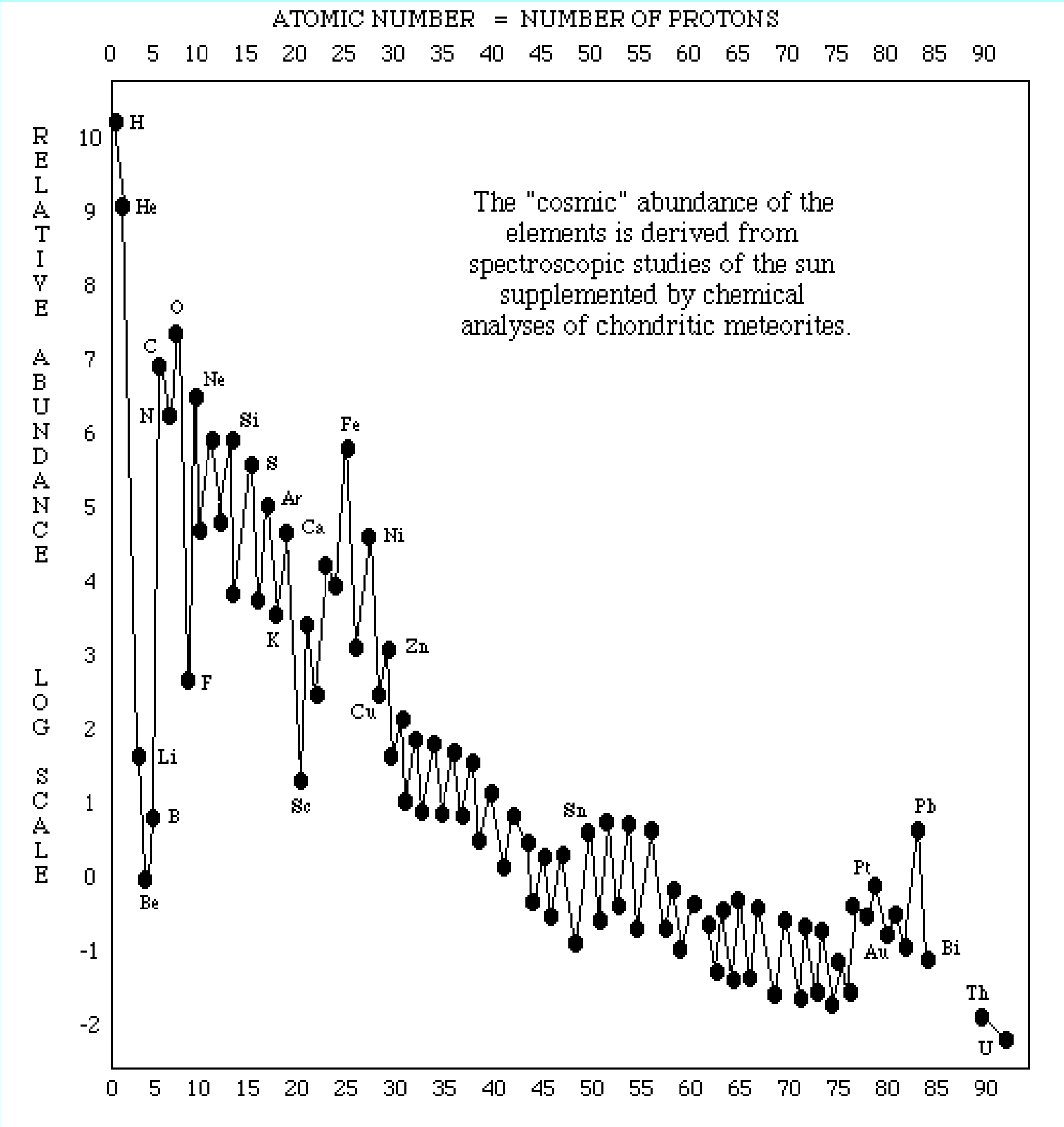
Het is mogelijk uit te rekenen in welke relatieve hoeveelheden de elementen en hun isotopen daarbij worden gevormd.

Er zijn aanwijzingen, dat het heelal voor de eerste sterren praktisch alleen uit waterstof en helium bestond en alle zwaardere elementen in sterren zijn gevormd.

Dit heet *Stellaire Nucleosynthese*.

De voorspellingen kloppen goed met de *Kosmische Abondantie* tabel, die aangeeft hoe de elementen en isotopen relatief t.o.v. elkaar voorkomen.

Voor alle sterren gaat deze tabel op details na op, behalve de verhouding van de zware elementen als geheel t.o.v. waterstof en helium.


ATOMIC NUMBER = NUMBER OF PROTONS
RELATIVE ABUNDANCE LOG SCALE
The "cosmic" abundance of the elements is derived from spectroscopic studies of the sun supplemented by chemical analyses of chondritic meteorites.
H
He
Li
Be
B
C
N
O
F
Ne
Si
S
Ar
K
Ca
Sc
Fe
Ni
Cu
Zn
Sn
Pt
Au
Pb
Bi
Th
U
0 5 10 15 20 25 30 35 40 45 50 55 60 65 70 75 80 85 90
10 9 8 7 6 5 4 3 2 1 0 -1 -2

Samenvatting ster-evolutie.

Massa	Stadium	H-R diagram
$\lesssim 0.007M_\odot$	Geen resultaat	-
	van fragmentatie	
$\sim 0.007M_\odot$	Bruine dwerg	-
$\sim 0.07M_\odot$		
~ 0.07	H-verbranding	Hoofdreeks
$\sim 0.5M_\odot$	Witte dwerg	links-onder
$\sim 0.5M_\odot$	H-verbranding	Hoofdreeks
	H-schil verbranding	Reuzentak
	He-verbranding	Horizontale tak
	He-(schil)verbranding	Asymp. Reuzentak
	Planetaire nevel	links-boven
	Witte dwerg of	links-onder
4 à $5M_\odot$	Neutronenster	-
$\gtrsim 4M_\odot$	H-verbranding	Hoofdreeks
	H-schil-verbranding	Reuzentak
	He-verbranding	Asymp. Reuzentak
	C-verbranding	kort
	Supernova	-
	Neutronenster	-
	of Zwart gat	-