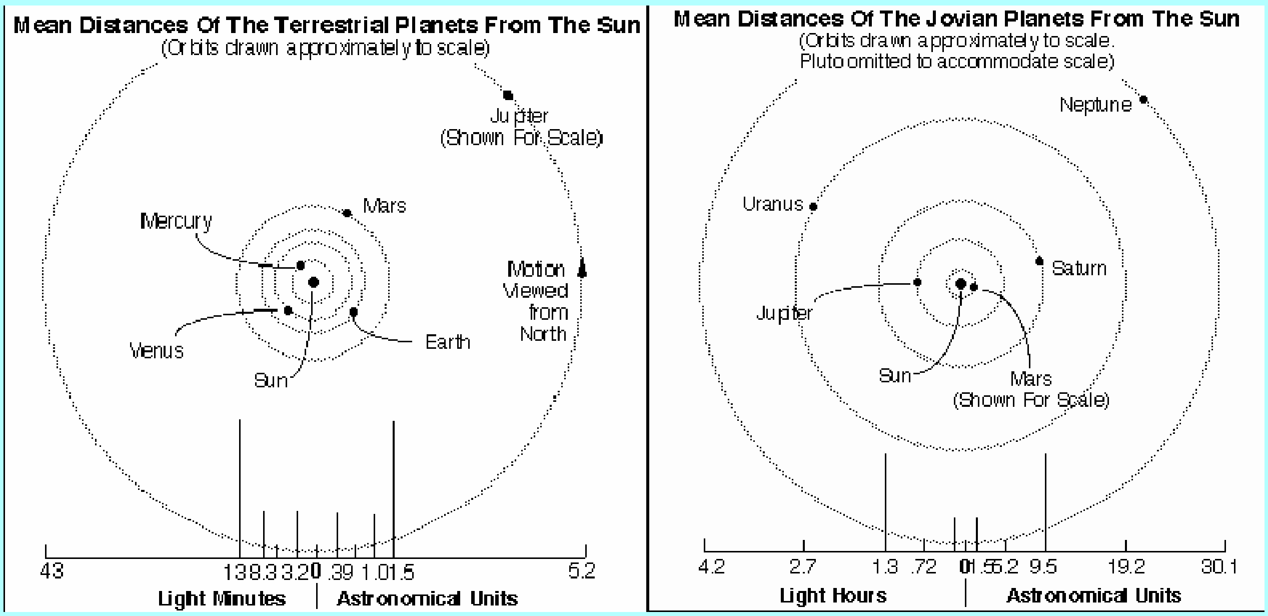
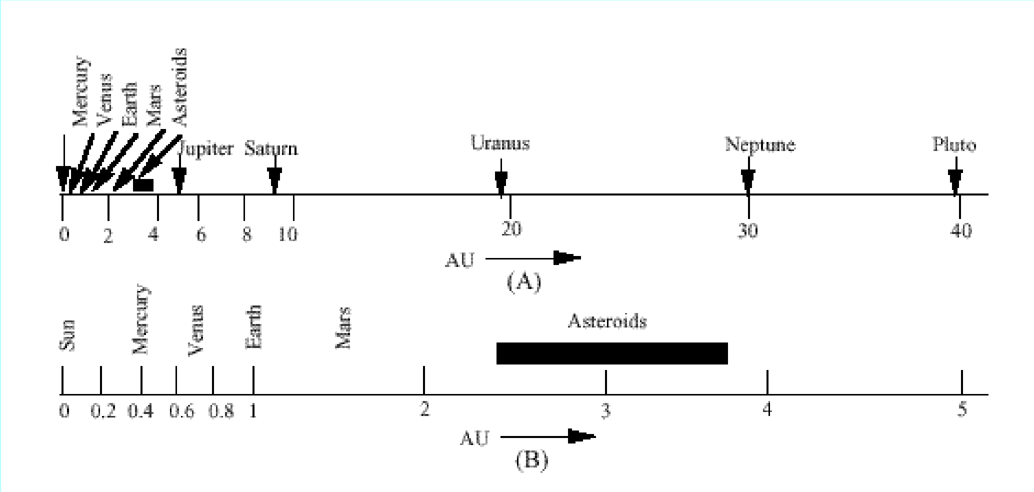
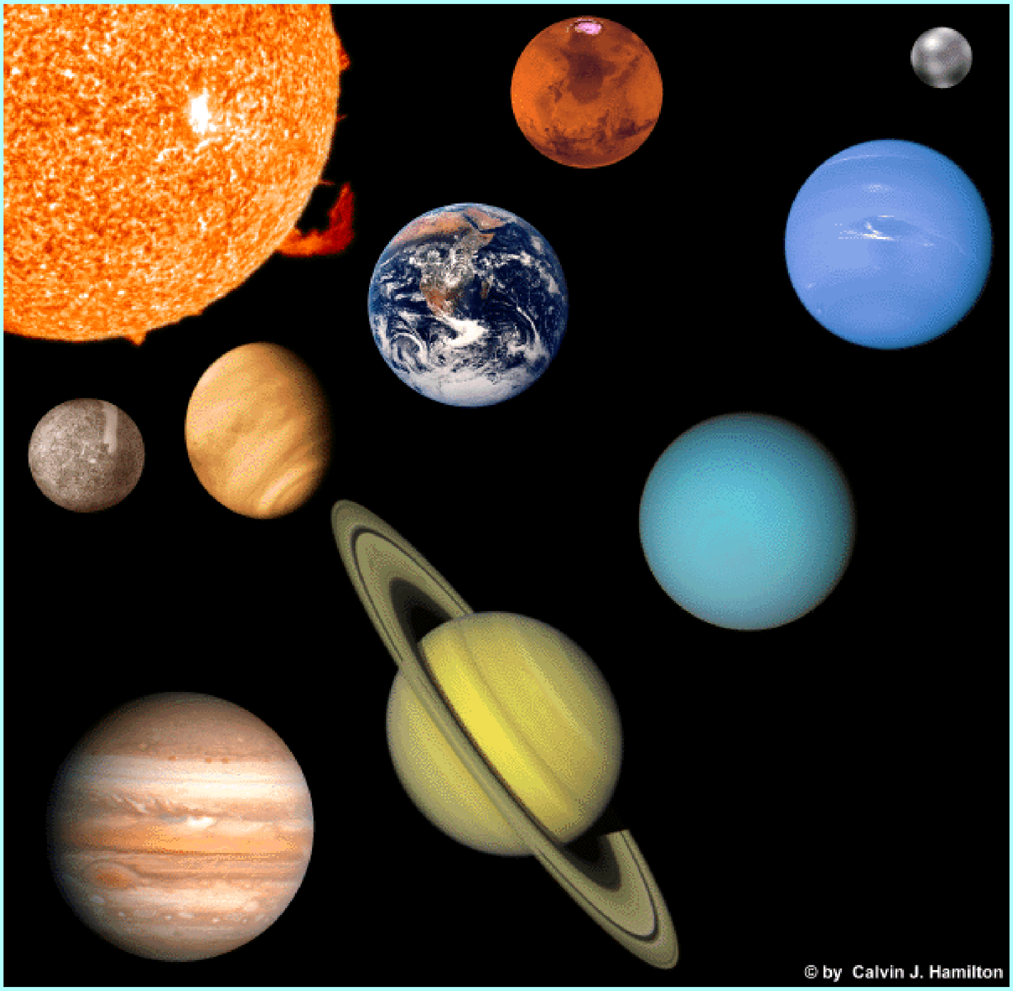
INLEIDING STERRENKUNDE

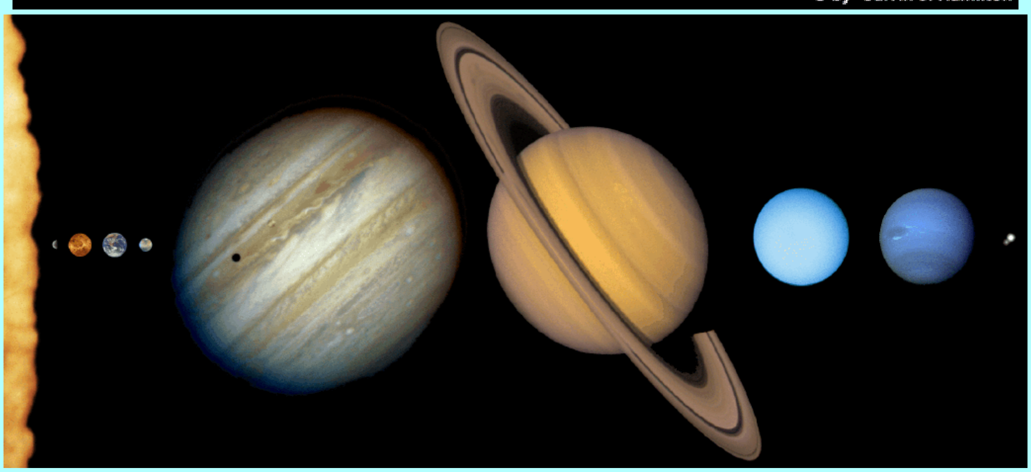
College 2. Het planetenstelsel; twee-lichamen probleem.

Het zonnestelsel bestaat uit de zon, negen planeten, satellieten, kometen en asteroïden.









Op de onderste montage zijn de planeten op dezelfde schaal weergegeven.

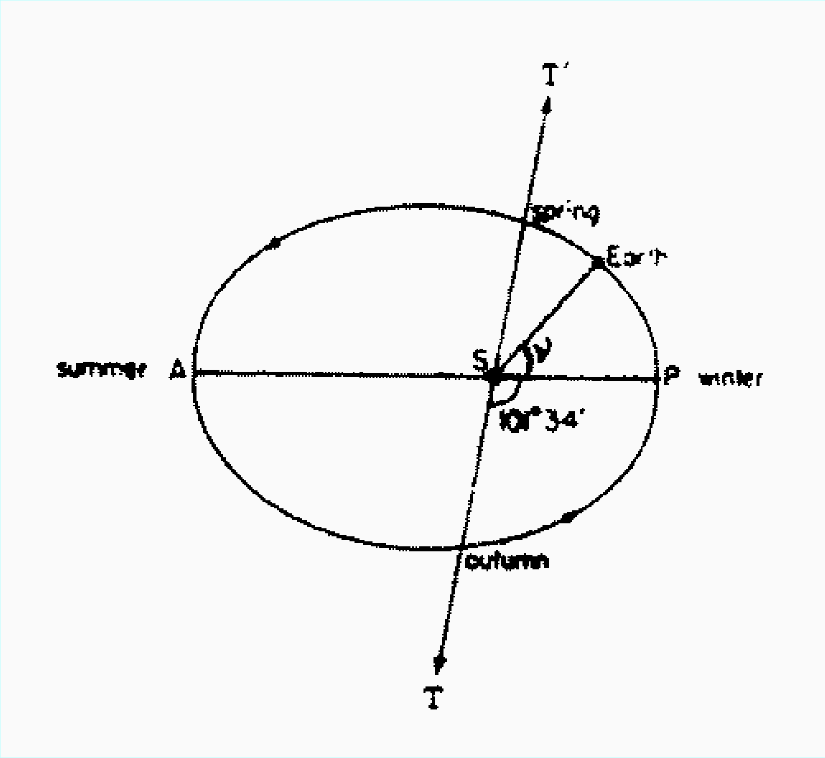
Wetten van Kepler.

De planeten bewegen in vlakken, die dicht bij dat van de ecliptica liggen.

De planeetbanen zijn te beschrijven met de drie wetten van Kepler.

Eerste wet van Kepler.

De planeetbaan is een ellips met de zon in één der brandpunten.



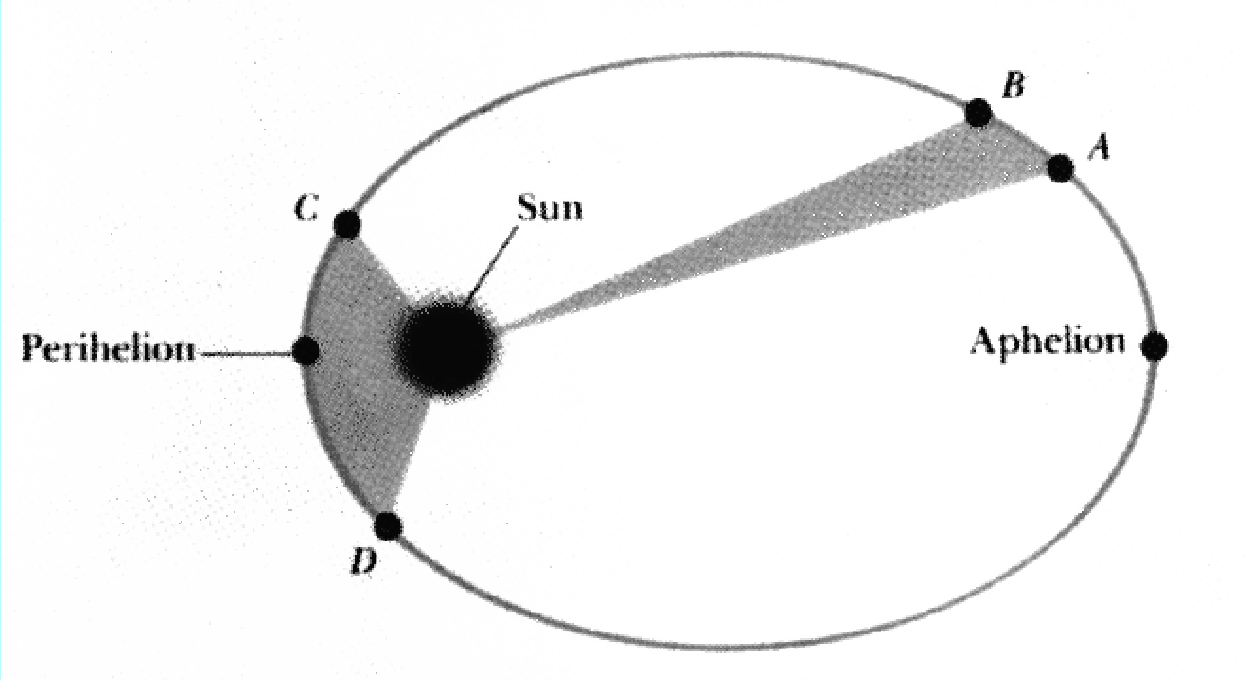
De formule van de baan is

$$\frac{a(1-e^2)}{r} = 1 - e\cos\nu$$

ν = ware anomalie; e = excentriciteit
a = halve lange as, uitgedrukt in Astronomische Eenheden (dus voor de aarde $a = 1$ A.U.)

Tweede wet van Kepler.

De afstand tot de zon vermenigvuldigd met de baansnelheid is constant.
Kepler beschreef dit aan de hand van het oppervlak, dat de straal beschrijft per tijds-eenheid.



Het is in feite behoud van impulsmoment.

Het is ook de oorzaak van de ongelijke duur van de seizoenen.

Herfst + winter is zo'n 6 dagen korter dan lente + zomer; dit was reeds bij Hipparchus (tweede eeuw BC) bekend.

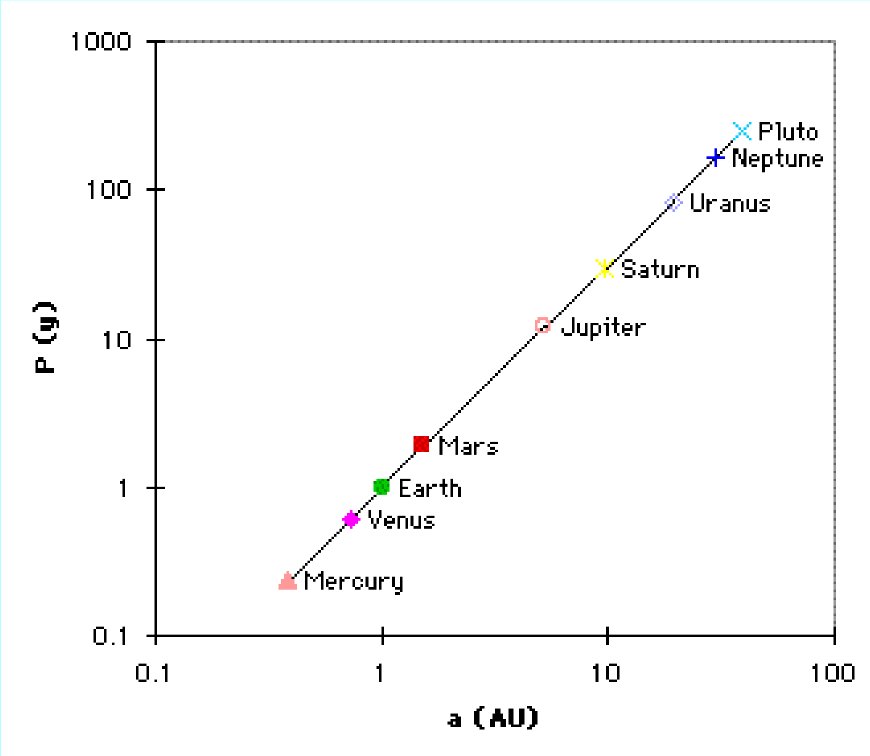
Derde of "harmonische" wet van Kepler.

De omloopstijd rond de zon (periode) in het kwadraat is evenredig met de derde macht van de halve lange as.

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G(M_\odot + M_\mathrm{p})} \approx \frac{4\pi^2}{GM_\odot}$$

T = periode $\quad M_\odot$ = massa v.d. zon
G = gravitatie-constante $\quad M_\mathrm{p}$ = massa v.d. planeet

Als we de periode uitdrukken in jaren en de halve lange as in A.U., dan $T^2/a^3 = 1$.



Voor een cirkelbaan kunnen we dit al heel eenvoudig inzien door de aantrekkingskracht gelijk te stellen aan de middelpuntvliedende kracht:

$$G\frac{M_\mathrm{p}M_\odot}{r^2} = \frac{M_\mathrm{p}V^2}{r}$$

Dus

$$V^2 = \frac{GM_\odot}{r}$$

De periode is $T = 2\pi r/V$, dus

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM_\odot}$$

Afstanden en massa's.

Afstandsbepaling.

Afstands-eenheid is de *Astronomische Eenheid* (A.U.) = de gemiddelde afstand van de aarde naar de zon.

• Via een asteroïde, die dicht bij de aarde komt. Bepaal de baan uit positiemetingen, dan vind je die ten opzichte van de aardbaan. Bepaal dan éénmaal de afstand uit de parallax vanaf twee plaatsen op aarde.

• Zonspassage van Mercurius of Venus (precieze timing van begin of eind vanaf twee plaatsen op aarde geeft de parallax).

• Radarpulsen weerkaatst op planeten.

• Nu natuurlijk zeer nauwkeurig bekend uit de ruimtevaart.

1 A.U. = 1.496×10^8 km.

Massabepaling.

- *Aarde*: Bepaal de versnelling van de zwaartekracht en G.

- *Zon*: Derde wet van Kepler.

- *Maan*: Meet de beweging van de aarde om het gemeenschappelijk zwaartepunt met behulp van de planeten. Thans op de maan of met een baan eromheen.

- *Planeten met manen*: Derde wet van Kepler.

- *Planeten zonder manen*: Verstoringen op andere planeetbanen.

- *Manen*: Meet straal en neem ρ als de maan.

- Nu natuurlijk via *passerende ruimtesondes.*

$$M_\oplus = 5.97 \times 10^{24}\ \mathrm{kg} \quad ; \quad M_\odot = 1.99 \times 10^{30}\ \mathrm{kg}$$

Banen in de ruimte en aan de hemel.

De banen kunnen worden vastgelegd met behulp van zes baan-elementen:

• Het baanvlak volgt uit:

– Ω; de lengte langs de ecliptica van de klimmende knoop (snijpunt van baanvlak en ecliptica, waar de planeet van ten zuiden naar ten noorden van de ecliptica gaat).

– i; de inclinatie (hoek tussen baanvlak en ecliptica).

• De afmeting en vorm van de baan met:

– a; de halve lange as.

– e; de excentriciteit.

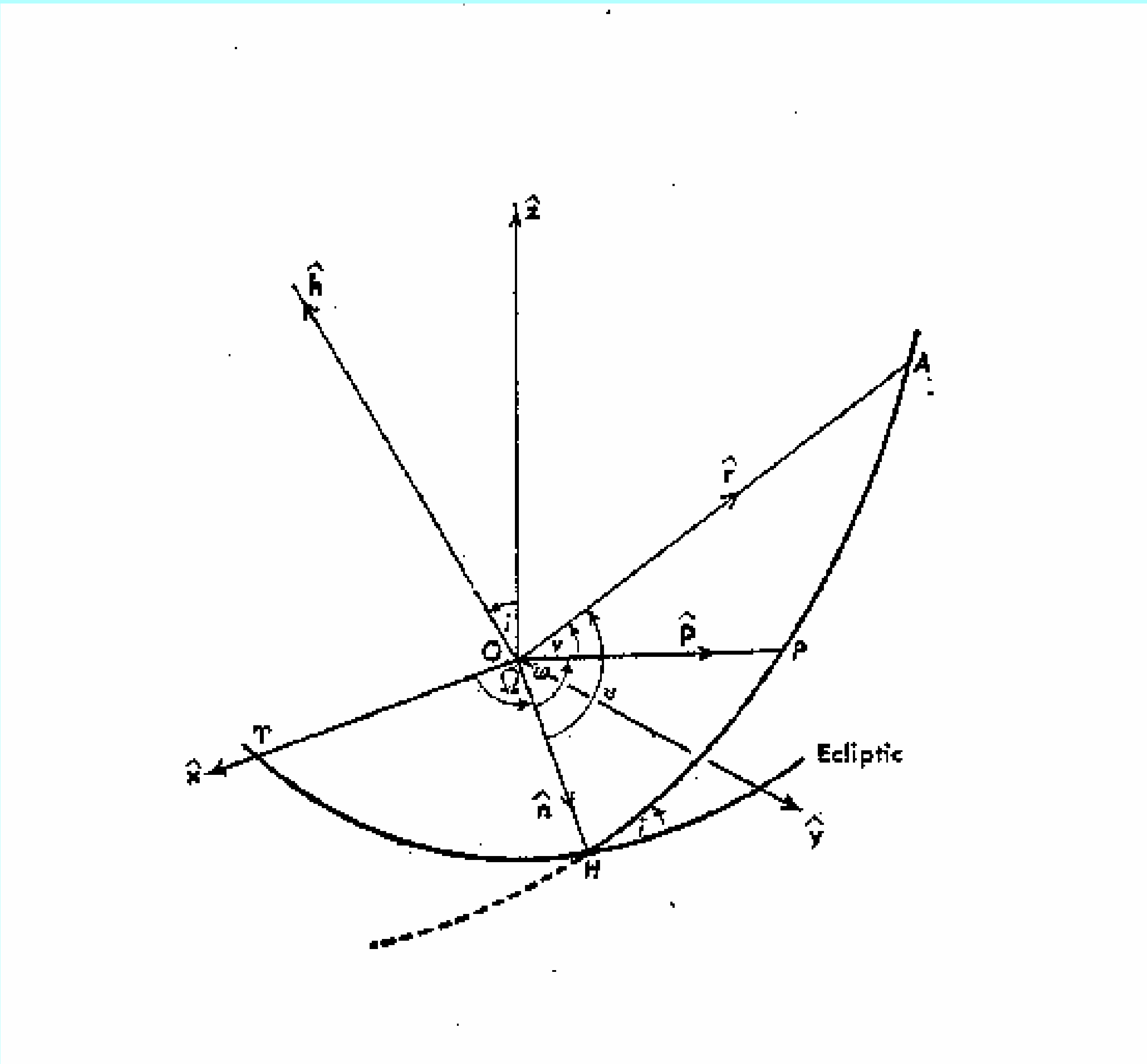
• De oriëntatie van de baan in het baanvlak:

– ω; de hoek tussen de richting van de klimmende knoop en die van het perihelium.

• De positie van de planeet in de baan met:

– $t_\circ$; een tijdstip van perihelium passage.

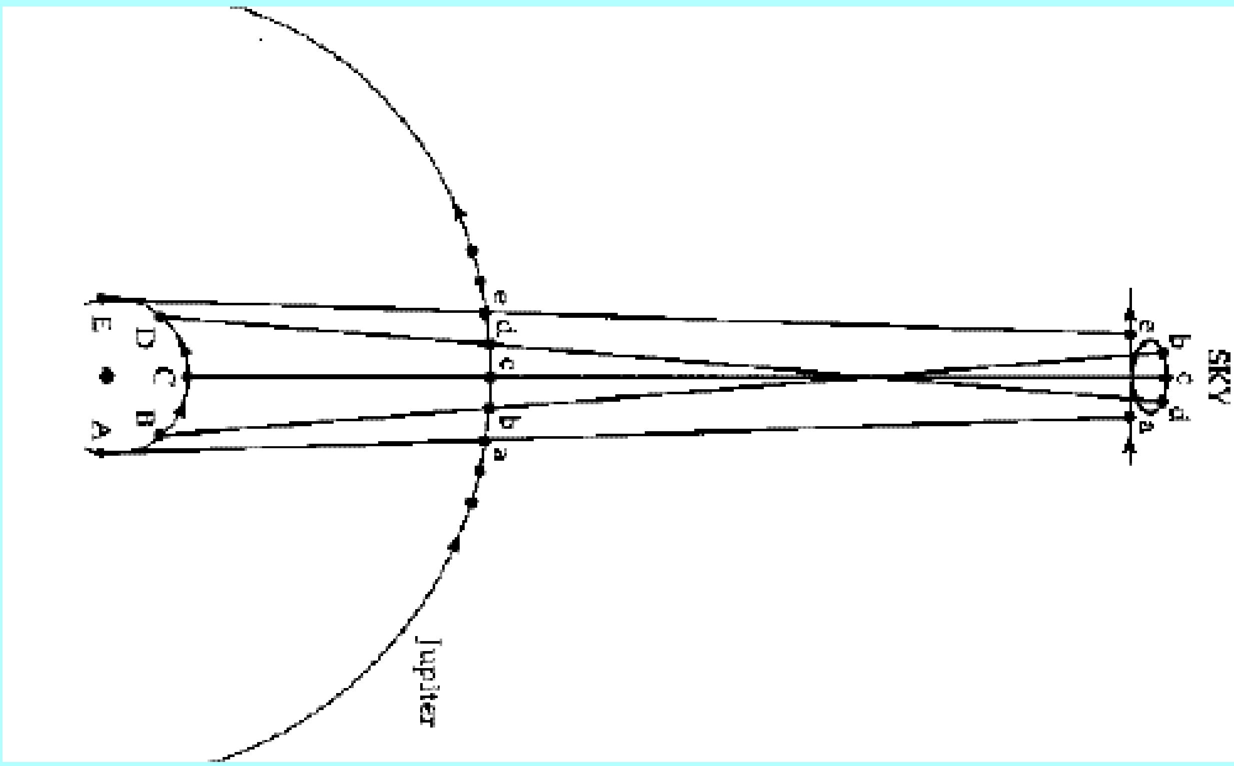
Natuurlijk is de omloopstijd T geen onafhankelijk grootheid volgens de derde wet van Kepler.



Opm. De (astronomische) lengte wordt gemeten langs de ecliptica vanaf het lentepunt ♈ (de positie van de zon op 21 maart ofwel de klimmende knoop van de zon, waar de ecliptica en equator snijden).

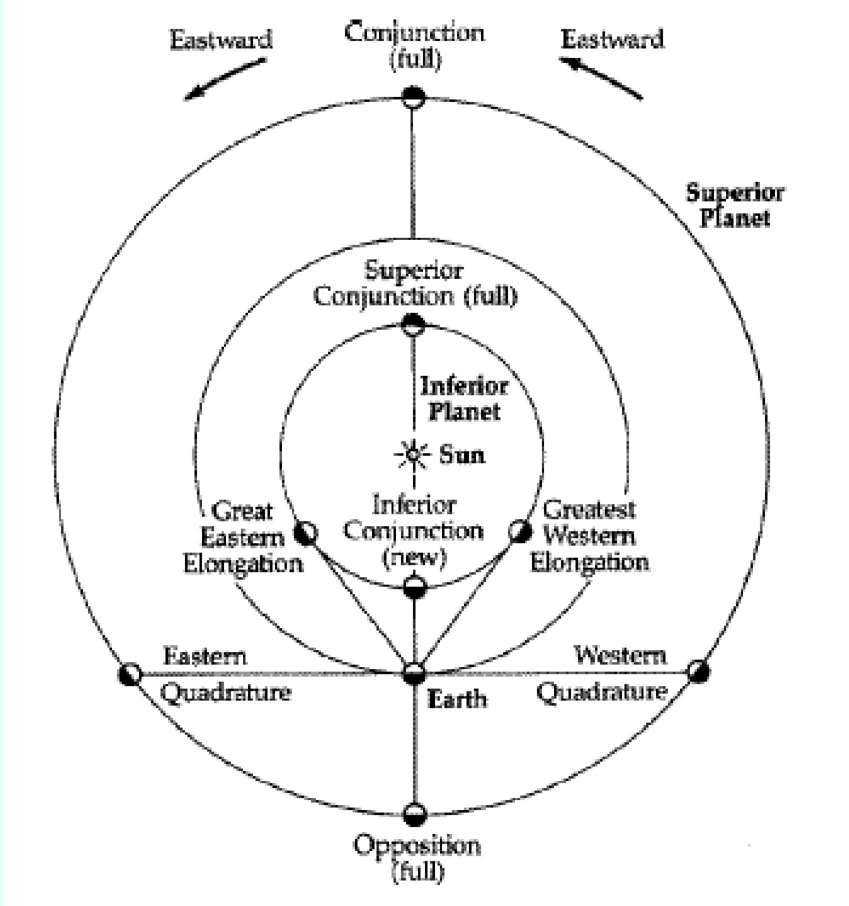
Gezien vanaf de aarde beschrijven de planeten banen aan de hemel, die lussen vertonen.

Bijvoorbeeld voor Jupiter, als de aarde van *A* naar *E* gaat en Jupiter van *a* naar *e*, dan zien we dit als een lus aan de hemel.



Dit heet de retrograde beweging.

Het is afspiegeling van het feit, dat de aarde ook een baan om de zon beschrijft.



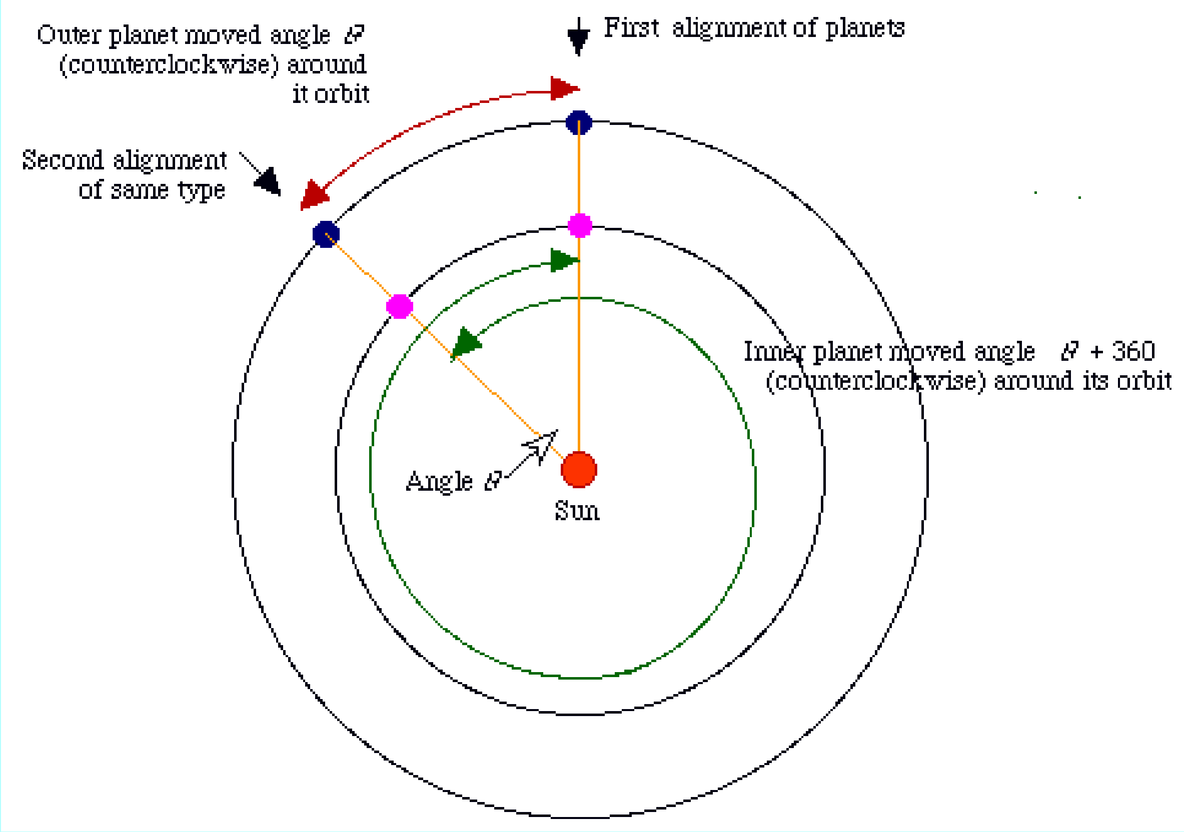
Retrograde beweging treedt op tijdens oppositie voor de buitenplaneten en onderste (inferior) conjunctie voor de binnenplaneten.

De omloopstijd T, die in de wetten van Kepler voorkomt is de "echte" omloopstijd in de baan.

Dit wordt ook wel siderische omloopstijd genoemd (siderisch om dat de planeet vanuit de zon dan precies weer op dezelfde plaats staat t.o.v. de sterren).

Ten opzichte van de aarde definieert men de synodische omloopstijd, waarbij de planeet eenzelfde configuratie met de aarde aanneemt.

Voor een buitenplaneet is de synodische omloopstijd de tijd, die verloopt tussen opeenvolgende opposities; voor binnenplaneten tussen opeenvolgende (zelfde) conjuncties.



In de figuur zien we de aarde en een buitenplaneet.

De gemiddelde hoeksnelheid van de aarde t.o.v. de zon is $360°/T_\oplus$ en die van de planeet $360°/T_{\text{sid}}$.

De relatieve hoeksnelheid $360°/T_{\text{syn}}$ is dan het verschil van die twee en een synodische omloopstijd wordt dan

$$\frac{1}{T_{\text{syn}}} = \frac{1}{T_\oplus} - \frac{1}{T_{\text{sid}}}.$$

Voor binnenplaneten

$$\frac{1}{T_{\text{syn}}} = \frac{1}{T_{\text{sid}}} - \frac{1}{T_\oplus}.$$

In de praktijk drukken we alles uit in jaren en dan is $T_\oplus = 1$.

Geocentrisch en heliocentrisch wereldbeeld.

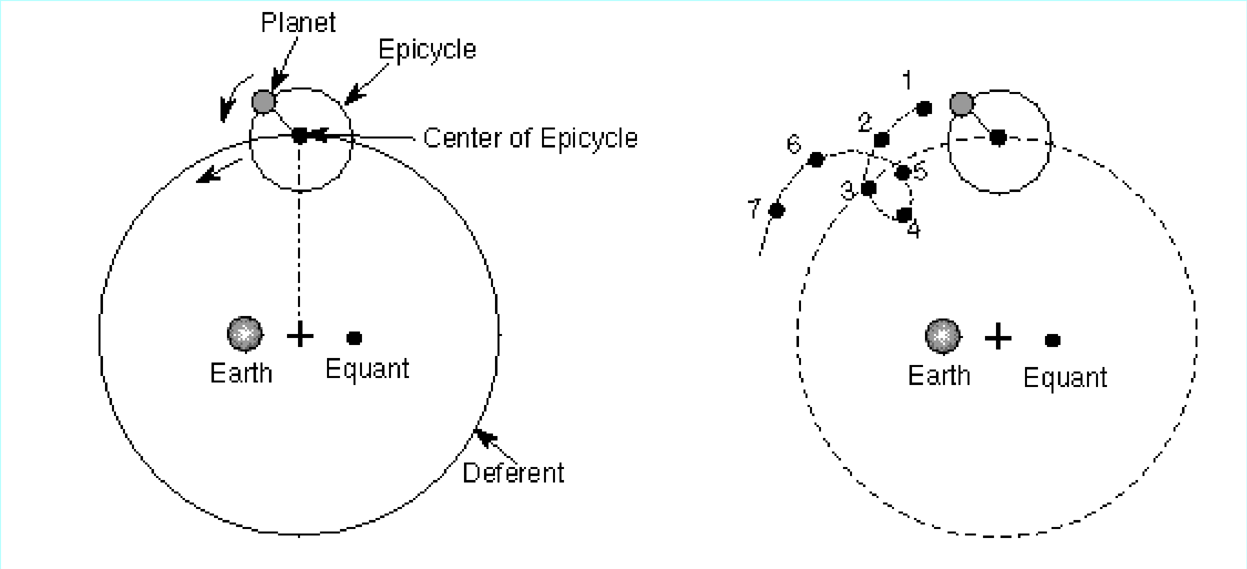
Pythagoras (zesde eeuw BC) is de grondlegger van de experimentele wetenschap (experimenten met toonhoogten; harmonische intervallen; "Harmonie der sferen").

Aristarchus ($\pm$310 – 230 BC) was de eerste, die voorstelde, dat de aarde en planeten in banen om de zon lopen (het heliocentrische wereldbeeld).

De filosofieën van Plato (427 – 348 BC) en Aristoteles (384 – 322 BC) met o.a. de perfecte beweging in rechte lijnen of cirkels met uniforme snelheid in het "bovenmaanse" en de imperfecte aard van de aarde gaven aanleiding tot het geocentrische wereldbeeld.

Het mondde uit in het "model" van het zonnestelsel van Claudius Ptolemeus ($\pm$ 100 – 170 AD).

Hierbij gaan de planeten om de aarde langs een deferent met daarop een epicycle.

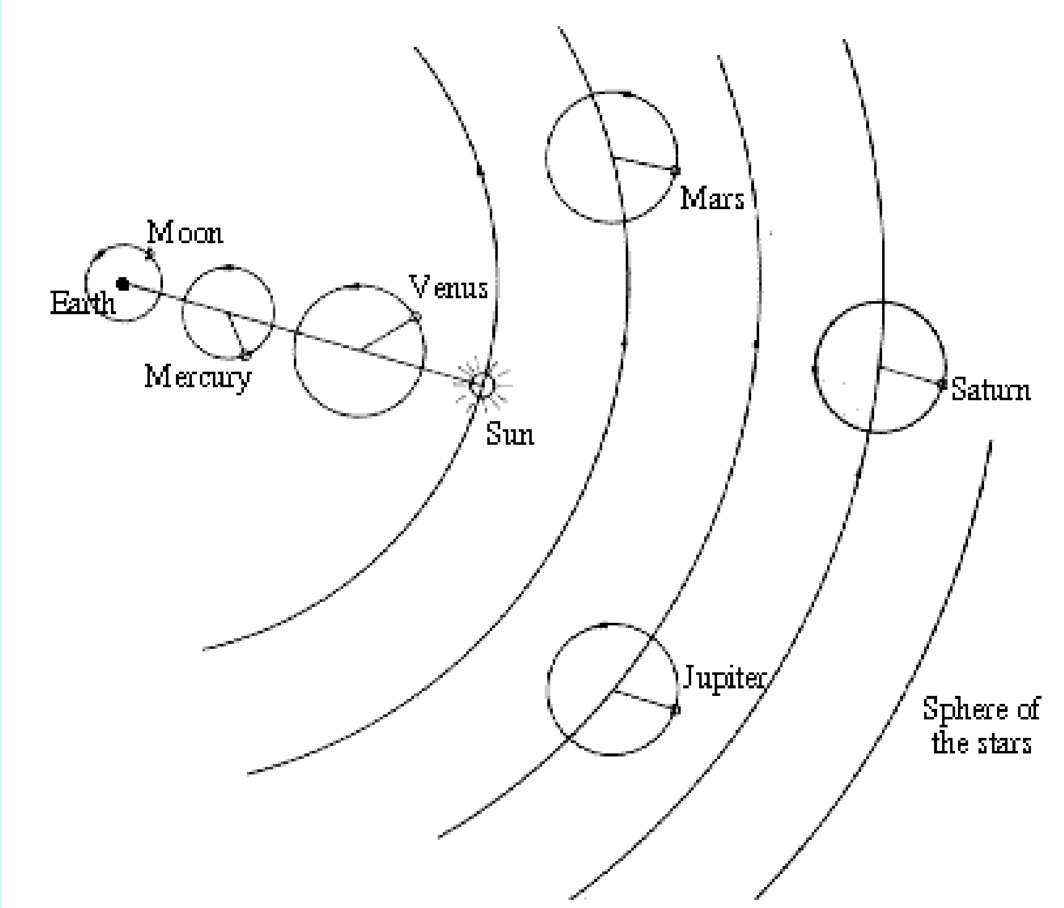


De excentriciteit van de planeetbanen vertaalde in dit beeld in het feit, dat de beweging langs de epicycle uniform was in hoeksnelheid t.o.v. de equant.

Opmerkelijk is, dat in echte planeetbanen (met niet te grote excentriciteit) de hoeksnelheid t.o.v. het brandpunt, waar de zon *niet* in staat, inderdaad ongeveer constant is.

Voor de buitenplaneten is de deferent de afspiegeling van de planeetbaan en de epicycle de baan van de aarde.

Voor de binnenplaneten is het andersom.



De positie in de epicycles voor de buitenplaneten moeten dus allemaal gelijk zijn, terwijl de centra van de epicycles voor de binnenplaneten altijd op de lijn aarde – zon moeten staan.

Dit is voor ons verdacht, maar Ptolemeus dacht niet in de vorm van zo'n figuur als hierboven.

Het model werkt, omdat planeetbanen aan de hemel alleen richtingen zijn en afstanden er niet toe doen.

Ook verklaart het Ptolemeïsch model niet de wisselende helderheid van de planeten.

Copernicus (1473 – 1543) keerde terug naar het "Platonische" ideaal-beeld. Hij was ontevreden over de equant.

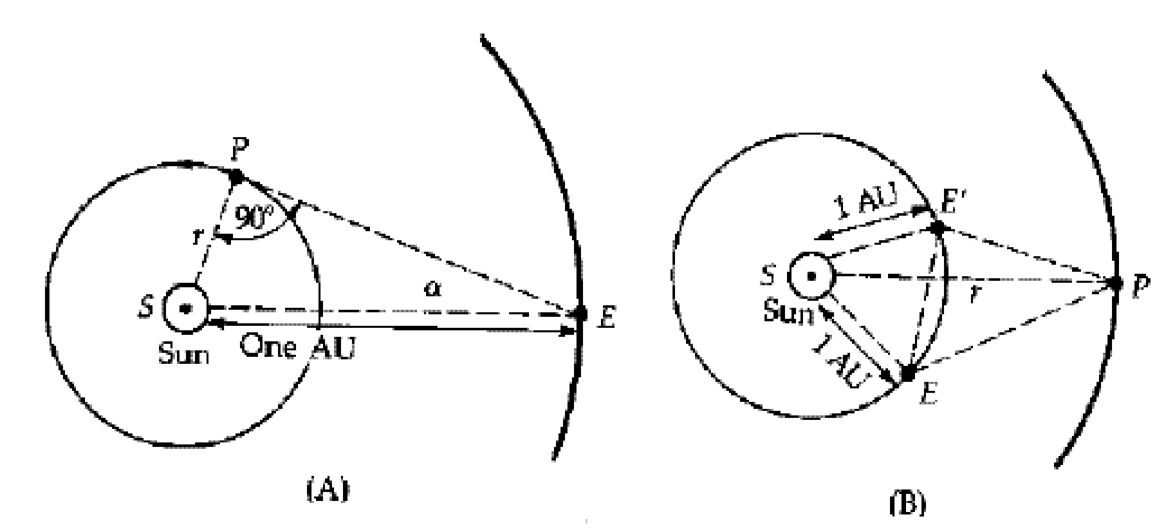
In feite gebruikte hij epicycles om de wisselende snelheid in een ellipsbaan te krijgen.

Tegelijk suggereerde hij ("omdat het eenvoudiger rekenen was"), dat de zon in het centrum zou staan.

Copernicus was meer een man van de Middeleeuwen en niet de echte vernieuwer.

Dit was Johannes Kepler (1571 – 1630), die de eerste was, die zich afvroeg welke vorm de banen van de planeten nu eigenlijk hebben en het experimenteel ging bepalen.

Daartoe gebruikte hij de nauwkeurige waarnemingen van Tycho Brahe (1546 – 1601).



Voor een binnenplaneet vind je de baan als in (A); dit werkt, omdat de baan van Venus bijna cirkelvormig is.

Voor Mars (B) nam hij metingen van de positie aan de hemel, precies een heel aantal siderische omloopstijden uit elkaar. Hij wist die, omdat dit in het oude model de omloopstijd in de deferent is.

Dan kan de positie P gevonden worden uit de driehoeken. Kepler deed dit voor vele tijdstippen en vond toen zijn eerste twee wetten.

Vervolgens kun je het dan omdraaien en twee posities vinden, waarbij de aarde op hetzelfde punt in de baan staat en zo de vorm van de aardbaan bepalen.

Kepler vond zijn “harmonische wet” later, toen hij naar harmonie in het planetenstelsel zocht.

Hij keerde terug naar de “harmonie der sferen” van Pythagoras, nam aan, dat als het ware elke planeet een toon voortbrengt evenredig met zijn (hoek)snelheid in de baan.

Dan bleken de verhoudingen heel dicht te liggen bij harmonische, muzikale intervallen.

Galileo Galilei (1564 – 1642) richtte als eerste een teleskoop op de hemel voor wetenschappelijke waarnemingen. In 1610 vond hij o.a. de satellieten van Jupiter als een miniatuur planetenstelsel en de schijngestalten van Venus.

Dit bevestigde het heliocentrisch wereldbeeld.

Isaac Newton (1642 – 1727) liet zien, dat de wetten van Kepler rechtstreeks uit zijn gravitatietheorie volgen.

Uranus werd ontdekt door William Herschel in 1781 tijdens zijn uitgebreide waarnemingen van de hemel.

Neptunus werd in 1846 gevonden, nadat Leverrier en Adams de positie hadden voorspeld uit de storingen op de baan van Uranus.

In 1610 stond Neptunus heel dicht bij Jupiter en Galileo heeft Neptunus volgens zijn tekeningen ook gezien, maar niet als een planeet herkend.

Pluto is in 1930 ontdekt door Tombaugh na een uitgebreide zoektocht.

De eerste planetoïde (Ceres) werd gevonden op 1-1-1801 door Piazzi. Snel volgden er meer. Nu zijn er meer dan 10000 bekend en ruim 8000 vernoemd.

Wet van Titius-Bode.

Op zoek naar regelmaat in het planetenstelsel vonden Titius en Bode (1772), dat de afmetingen van de planeetbanen een “eenvoudige” reeks volgden:

$$a = 0.4 + (0.3)2^n,$$

met a in A.U. Wel is dan $n = -\infty$ voor Mercurius, $n = 0$ voor Venus, etc.

Planet	n	Titius-Bode Law	Semi-Major Axis
Mercury	$-\infty$	0.40	0.39
Venus	0	0.70	0.72
Earth	1	1.00	1.00
Mars	2	1.60	1.52
asteroid belt	3	2.80	2.8
Jupiter	4	5.20	5.20
Saturn	5	10.0	9.54
Uranus	6	19.6	19.2
Neptune	-	-	30.1
Pluto	7	38.8	39.4

Dit is het gevolg van resonanties. Door onderlinge wisselwerkingen komen planeten in banen met omloopstijden, die een verhouding van omloopstijd (en dus halve grote as) hebben.

Bijvoorbeeld: Aarde en Venus hebben omloopstijden van 1.000 en 0.615 jaar, bijna in verhouding 5 : 3. Voor Jupiter (11.862 jaar) en Saturnus (29.457 jaar) is de verhouding 0.403 of bijna precies 5 : 2.

Computer experimenten hebben dit beeld bevestigd.

Deze resonanties liggen ook ten grondslag aan Keplers variant van de Harmonie der Sferen.

Ontstaan van het planetenstelsel.

Rond de zon ontstond een wolk van gas en vooral stof, waarin het grootste deel van het hoekmoment terecht kwam. Daardoor werd het zeer afgeplat.

Hierin condenseerden de planeten, eerst als kleine protoplaneten, die vervolgens samensmolten tot grotere planeten.

Dit verklaart waarom:
(1) de planeten ongeveer in hetzelfde vlak liggen,
(2) allemaal dezelfde kant op gaan in ruwweg cirkelbanen en
(3) bijna al het hoekmoment in de planeetbanen zit (de zon heeft 99.86% van de massa en slechts 2% van het hoekmoment).

De asteroïden zijn waarschijnlijk ontstaan bij een botsing van twee (proto)planeten in ongeveer dezelfde baan.

De leeftijd van het zonnestelsel is ongeveer 4.5×10^9 jaar, gemeten met behulp van radioactieve elementen.

Twee-lichamen Probleem.

Het volgende is ook geen tentamenstof. Het laat met name zien hoe de wetten van Kepler uit de gravitatietheorie van Newton volgen en enkele verwante zaken.

Fundamentele vergelijkingen.

Neem twee massa's m_1 en m_2 met positie-vectoren $\vec{r}_1$ en $\vec{r}_2$.

Dan zijn er twee fundamentele vergelijkingen:

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = -G m_1 m_2 \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{r^3} \tag{1}$$

$$m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = -G m_1 m_2 \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{r^3} \tag{2}$$

$\ddot{\vec{r}}$ staat voor $d^2\vec{r}/dt^2$.

Zwaartepunt.

Het zwaartepunt ligt op

$$\vec{R} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2} \equiv \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{M}$$

Tel (1) en (2) op, dan volgt

$$m_1\ddot{\vec{r}}_1 + m_2\ddot{\vec{r}}_2 = 0$$

Integreer dit twee keer, dan

$$m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 \equiv M\vec{R} = \vec{a}t + \vec{b} \qquad (3)$$

Dus het zwaartepunt is in lineaire beweging.

<u>Meebewegend coordinatenstelsel.</u>

Neem nu het zwaartepunt als oorsprong, zodat

$$m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 = 0$$

Dan

$$\ddot{\vec{r}}_1 = -G\frac{m_2\vec{r}_1 - m_2\vec{r}_2}{r^3} = -GM\frac{\vec{r}_1}{r^3}$$

$$\ddot{\vec{r}}_2 = -G\frac{m_1\vec{r}_2 - m_1\vec{r}_1}{r^3} = -GM\frac{\vec{r}_2}{r^3}$$

Dus als $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ (de vector tussen de twee lichamen)

$$\ddot{\vec{r}} = -GM\frac{\vec{r}}{r^3} \qquad (4)$$

We hebben dus drie differentiaalvergelijkingen van de tweede orde; dus we krijgen in principe **6** integratieconstanten.

Hoekmoment.

Vermenigvuldig (4) met $\vec{r}$.

$$\vec{r} \times \ddot{\vec{r}} = -GM \frac{\vec{r} \times \vec{r}}{r^3} = 0$$

Integreer deze vergelijking

$$\vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \text{constant} = \vec{h} \qquad (5)$$

Dit kun je zien door weer te differentiëren en te bedenken, dat $\dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}} = 0$.

Vergelijking (5) zegt, dat het hoekmoment behouden wordt (Kepler's tweede wet) en dat de beweging beperkt is tot het vlak

$$\vec{r} \cdot \vec{h} = 0$$

Met $\vec{h}$ hebben we drie integratieconstanten.

Baanvergelijking.

Voor het volgende hebben we de volgende vergelijkingen nodig uit de vector-rekening: $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \cdot \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c}$ en $\vec{a} \cdot \dot{\vec{a}} = a\dot{a}$ (want $\vec{a} \cdot \vec{a} = a^2$).

Begin weer met (4) en vermenigvuldig met $\vec{h}$

$$\begin{aligned}
\vec{h} \times \ddot{\vec{r}} &= -\frac{GM}{r^3}(\vec{h} \times \vec{r}) = -\frac{GM}{r^3}(\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) \times \vec{r} \\
&= -\frac{GM}{r^3}\{r^2\dot{\vec{r}} - (\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}})\vec{r}\} \\
&= -\frac{GM}{r^3}\{r^2\dot{\vec{r}} - (r\dot{r})\vec{r}\} \\
&= -GM\left(\frac{\dot{\vec{r}}}{r} - \frac{\dot{r}\vec{r}}{r^2}\right) \\
&= -GM\frac{d}{dt}\frac{\vec{r}}{r} = -GM\frac{d\hat{r}}{dt}
\end{aligned}$$

Integreer dit

$$\vec{h} \times \dot{\vec{r}} = -GM\hat{r} - \vec{P} \qquad (6)$$

Om meer van $\vec{P}$ te weten te komen vermenigvuldigen we met $\vec{h}$

$$\vec{h} \cdot (\vec{h} \times \dot{\vec{r}}) = -GM\hat{r} \cdot \vec{h} - \vec{P} \cdot \vec{h}$$

De term links en de eerste rechts zijn 0, dus

$$0 = \vec{P} \cdot \vec{h} \tag{7}$$

Dus $\vec{P}$ staat loodrecht op $\vec{h}$ en geeft twee verdere integratieconstanten.

Ga nu terug naar (6) en vermenigvuldig met $\vec{r}$

$$\begin{aligned} \vec{r} \cdot (\vec{h} \times \dot{\vec{r}}) &= -GM\vec{r} \cdot \hat{r} - \vec{P} \cdot \vec{r} \\ -\vec{h} \cdot (\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) &= -GMr - \vec{p} \cdot \vec{r} \\ -\vec{h} \cdot \vec{h} = -h^2 &= -GMr - \vec{P} \cdot \vec{r} \end{aligned}$$

Dus

$$\frac{h^2}{GMr} = 1 + \frac{\vec{P}}{GM} \cdot \frac{\vec{r}}{r} = 1 + \frac{\vec{P}}{GM} \cdot \hat{r}$$

Noem de hoek tussen $\hat{r}$ en $\vec{P}$ nu ν (de *ware anomalie*), zodat $\vec{P} \cdot \hat{r} = P \cos \nu$,dan

$$\frac{h^2}{GMr} = 1 + \frac{P}{GM} \cos \nu \tag{8}$$

Deze *baanvergelijking* is de algemene vergelijking van een kegelsnede (in poolcoördinaten en één brandpunt in de oorsprong)

$$r = \frac{q}{1 + e \cos \nu}$$

We zien dus dat de excentriciteit

$$e = \frac{P}{GM}$$

Voor een ellips geldt verder

$$\frac{h^2}{GM} = q = a(1 - e^2)$$

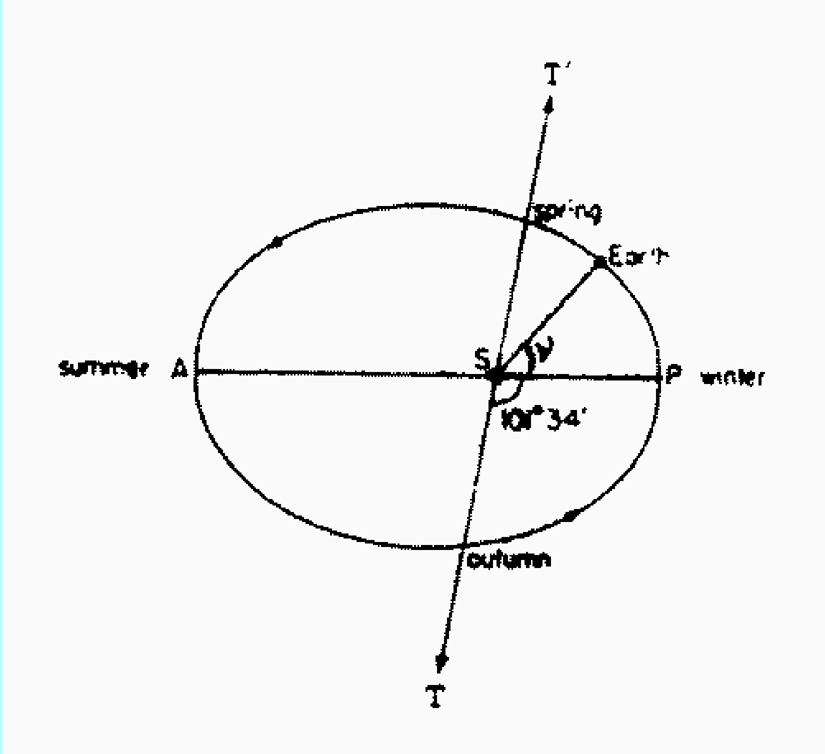
Voor een hyperbool

$$\frac{h^2}{GM} = q = a(e^2 - 1)$$

Een parabool heeft $e = 1$.

Bij een elliptische planeetbaan is de *perihelium*-afstand (de kleinste afstand tot de zon) $a(1-e)$ en de *aphelium*-afstand (de grootste) $a(1+e)$.

Uit (7) zien we dat $\nu = 0$ de kleinste r geeft en dat dus $\vec{P}$ de richting van het perihelium aangeeft.



De energie integraal.

Het totaal van de kinetische en potentiële energie (de energie integraal) is constant

$$\frac{V^2}{2} - \frac{GM}{r} = C$$

Het hoekmoment is gelijk aan de hoeksnelheid ($d\nu/dt$) maal de straal in het kwadraat, dus $h = r^2 d\nu/dt$. De tangentiële snelheid is dan

$$r\frac{d\nu}{dt} = \frac{h}{r} = \frac{h}{q}(1 + e\cos\nu) = \frac{GM}{h}(1 + e\cos\nu)$$

De baanvergelijking was voor een ellipsbaan

$$\frac{a}{r}(1 - e^2) = \frac{h^2}{GMr} = 1 + e\cos\nu$$

Differentieer dit en gebruik $d\nu/dt = h/r^2$, dan is de radiële snelheid

$$\dot{r} = \frac{eGM}{h} \sin \nu$$

Daaruit volgt dan de totale snelheid

$$V^2 = \left(\frac{GM}{h}\right)^2 (1 + e^2 + 2e \cos \nu)$$

Vul dit in in de energie integraal, dan

$$C = -\frac{1}{2} \left(\frac{GM}{h}\right)^2 (1 - e^2) = -\frac{GM}{2a}$$

Hiermee kunnen we dus de baansnelheid op elk punt uitrekenen:

$$V^2 = GM \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right) \qquad (9)$$

Voor een paraboolbaan is $C = 0$ en voor een hyperboolbaan $C = GM/2a$.

In een cirkelbaan hebben we

$$V^2_{\text{circ}} = \frac{GM}{r}$$

Op straal r is de ontsnappingssnelheid die in een paraboolbaan

$$V_{\text{escape}}^2 = 2\frac{GM}{r}$$

Anomalieën en de derde wet van Kepler.

De positie in een ellipsbaan volgde uit de *ware anomalie* ν

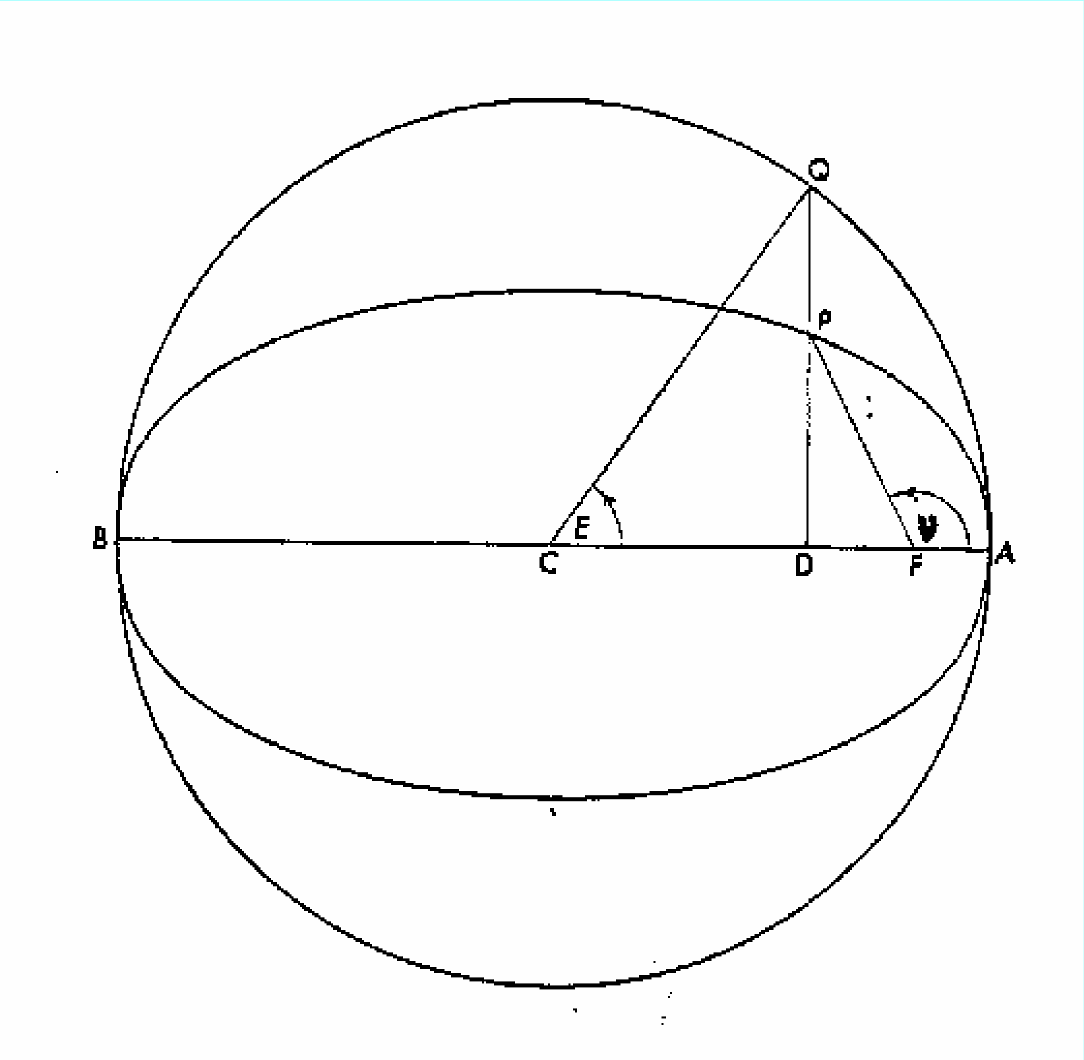
$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e\cos\nu} \qquad (10)$$

Definieer nu de *excentrische anomalie* E met

$$r = a(1 - e\cos E) \qquad (11)$$

Uit de figuur kan worden afgeleid met halve lange as a en halve kleine as $b = a\sqrt{1 - e^2}$, dat

$$\begin{aligned} r^2 &= PD^2 + DF^2 = \left(\frac{b}{a}DQ\right)^2 + (CF - CD)^2 \\ &= \left(\frac{b}{a}a\sin E\right)^2 + (ae - a\cos E)^2 \\ &= a^2(1 - e\cos E)^2 \end{aligned}$$



Verder kan met (10) en (11) worden uitgerekend, dat

$$\tan\left(\frac{\nu}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\tan\left(\frac{E}{2}\right) \tag{12}$$

E is zo gedefinieerd, dat $dE/dt \geq 0$, want E is een hoek vanuit het centrum van de baan, die met de projectie van de planeet op de omsluitende cirkel meeloopt in dezelfde richting als ν.

We hadden

$$\vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \vec{h}$$

Kwadrateer dit en vul de energie integraal in:

$$GM\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right) r^2 - r^2 \dot{r}^2 = GMa(1 - e^2)$$

Differentieer (11)

$$\dot{r} = ae \frac{dE}{dt} \sin E$$

en vul dit in

$$dt = \sqrt{\frac{a^3}{GM}}(1 - e \cos E) dE$$

Integreer dit over een hele baan

$$\int_0^T dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{a^3}{GM}}(1 - e \cos E) dE$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{GM}}$$

Dit is de derde wet van Kepler, die ook geschreven kan worden als

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G(m_1 + m_2)} \tag{13}$$

De vergelijking van Kepler.

E loopt (net als ν) niet uniform met de tijd. Neem daarom de *gemiddelde anomalie* M, die wel uniform met de tijd gaat.

$$M = \frac{2\pi}{T}(t - t_\circ) = \sqrt{\frac{GM}{a^3}}(t - t_\circ) = n(t - t_\circ) \quad (14)$$

Hier is dus n de gemiddelde beweging en $t_\circ$ een moment van perihelium passage. Dan

$$dt = \frac{1}{n}(1 - e\cos E)dE$$

Integreer dit

$$n(t - t_\circ) = M = E - e\sin E \qquad (15)$$

Dit is de *vergelijking van Kepler*, die aangeeft met welke constructie Kepler werkte. De kunst was om voor gegeven M hieruit E te vinden.

Kepler deed dit met behulp van tabellen voor voor diverse waarden van e.

Baanparameters.

We hadden in bovenstaande 6 integratieconstanten:

- Drie constanten van de hoekmoment-vector $\vec{h}$. Dit definieert het baanvlak en de grootte van het totale hoekmoment (en daarmee de afmeting van de baan).
- Twee constanten met de vector $\vec{P}$. De richting geeft die van het perihelium en de grootte de excentriciteit van de baan.
- De zesde constante is een moment van perihelium passage $t_\circ$.

In de praktijk vervangen we deze door de eerder gegeven zes baanelementen.