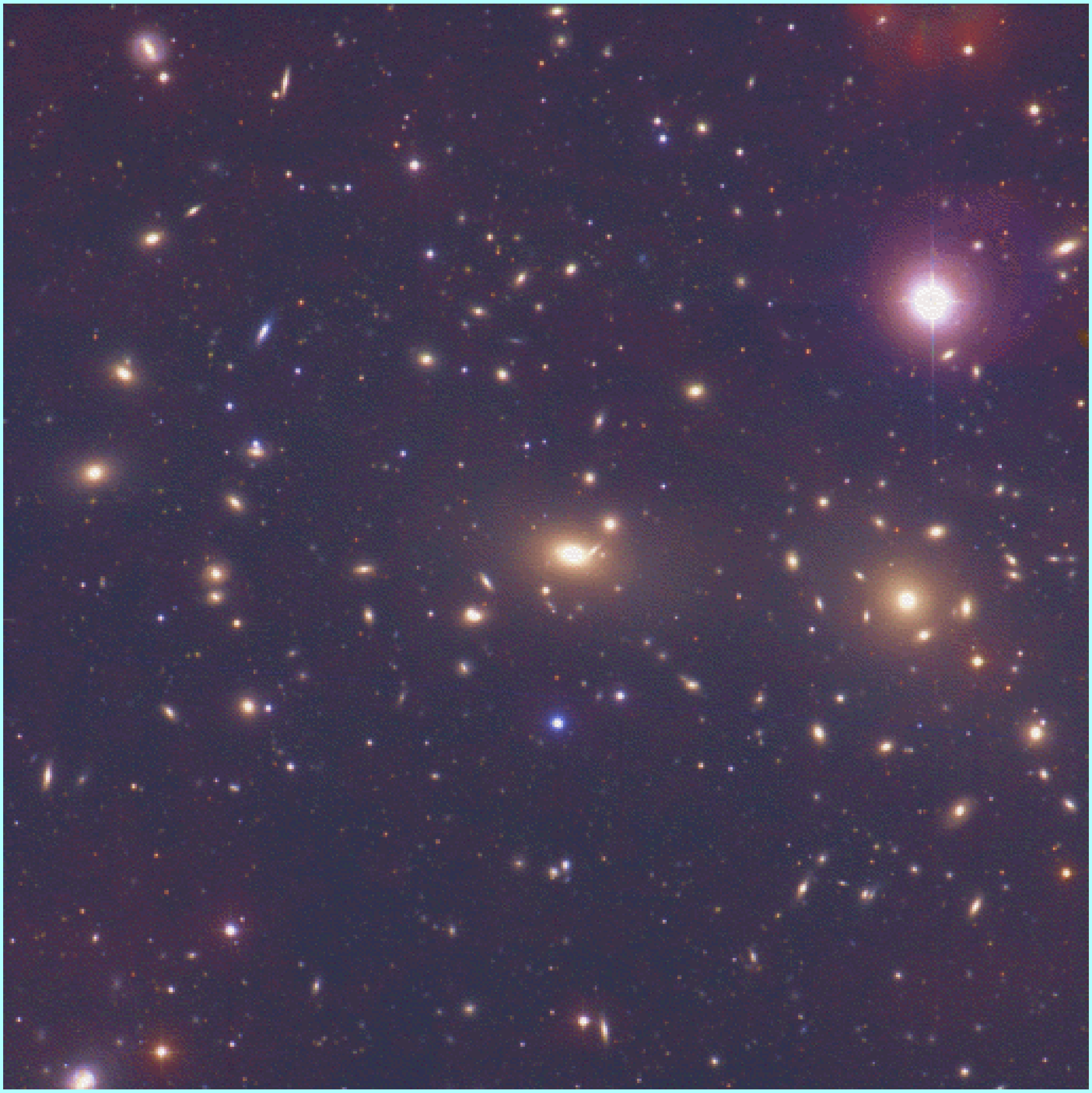
INLEIDING
STERRENKUNDE

College 11. Waarom is het ’s nachts donker?



Olbers' Paradox

Deze paradox is geformuleerd door Kepler (1610), Halley (1720), Cheseaux (1744) en Olbers (1823).

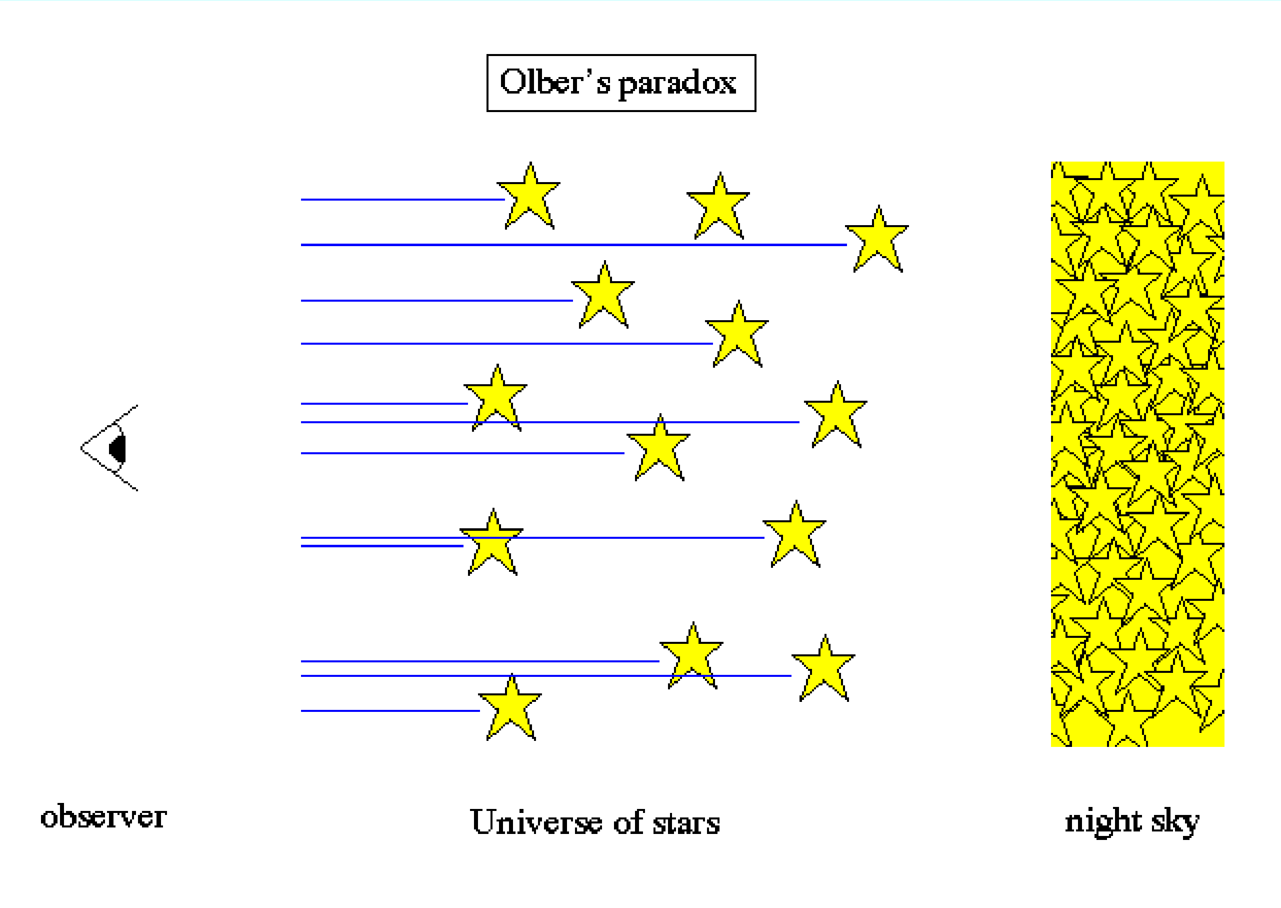
Neem aan, dat alle sterren een lichtkracht L hebben en uniform met dichtheid n door de ruimte verdeeld liggen.

Van een schil met straal r en dikte dr is de totale helderheid

$$L(r) = 4\pi r^2 \, dr \, n \frac{L}{4\pi r^2} = nL \, dr$$

Als je dit optelt over alle schillen met r van 0 tot ∞, krijg je dus een oneindig heldere hemel!

Eigenlijk moet je rekening houden met de eindige afmeting van sterren; dan nog vind je, dat de hemel net zo helder moet zijn als het oppervlak van de zon.



Om het te begrijpen formuleren we het thermo-dynamisch.

Van elke ster ontvangen we op aarde $L/(4\pi r^2)$ J sec^{-1} cm^{-2}.

Dus door een oppervlakje met diameter $d\sigma$ is de energie, die er per seconde door gaat

$$\frac{L d\sigma}{4\pi r^2}$$

Deze energie vult in een tijdje dt een cylindertje met doorsnede $d\sigma$ en lengte $c\ dt$.

Dus de energie-dichtheid t.g.v. een ster op afstand r is

$$\frac{L\ d\sigma}{4\pi r^2}\,dt\,\frac{1}{c\ dt\ d\sigma} = \frac{L}{4\pi r^2 c}$$

In de schil zijn $4\pi r^2 n\ dr$ sterren en dus is de bijdrage aan de lokale energie-dichtheid u

$$du = \frac{4\pi r^2 n\ dr\ L}{4\pi r^2 c} = \frac{nL}{c}dr$$

Maar sterren kunnen ook licht onderscheppen.

Als hun straal R is, is de werkzame doorsnede $\sigma = \pi R^2$ (en dus hun "echte" oppervlak 4σ).

In een cylindertje $d\sigma\ dl$ is dus de totale werkzame doorsnede $n\sigma\ d\sigma\ dl$.

De kans op onderschepping van het licht is dan de totale doorsnede $d\sigma$ gedeeld door de totale werkzame doorsnede

$$\frac{n\sigma\, d\sigma\, dl}{d\sigma} = n\sigma\, dl$$

De gemiddelde vrije weglengte λ is die dl, waarvoor die kans 1 is.

Dus

$$\lambda = (n\sigma)^{-1}$$

Als er m fotonen over een afstand r reizen zijn er volgens Poisson statistiek dan nog $m\mathrm{e}^{-r/\lambda}$ over.

Dus zal de bijdrage aan de energie-dichtheid $(nL/c)dr$, die van afstand r komt, gereduceerd worden met deze factor.

$$du = \frac{nL}{c}\mathrm{e}^{-r/\lambda}dr$$

Integreer dit

$$u = \int_{r=0}^{r=\infty} du = \frac{nL}{c}\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-r/\lambda}dr = \frac{nL\lambda}{c} = \frac{L}{\sigma c}$$

Aan het oppervlak van elke ster met een zekere effectieve temperatuur is de energie-dichtheid in straling gelijk aan die van het zwarte lichaam van die temperatuur

$$u^* = aT_{\mathrm{eff}}^4$$

Dan is

$$L = 4\sigma \frac{ac}{4} T_{\mathrm{eff}}^4$$

en dus

$$u^* = \frac{L}{\sigma c}$$

Dus de paradox is, dat

$$u = u^*$$

De energie-dichtheid in het heelal zou overal hetzelfde moeten zijn als aan het oppervlak van de sterren!

Oplossingen van Olbers' Paradox

- Kepler en Halley concludeerden, dat dus het heelal eindig moest zijn.

- Cheseuax veronderstelde, dat de verzwakking van het licht een klein beetje sneller ging dan met r^{-2}.

- Olbers stelde, dat interstellaire materie licht zou absorberen. Dit werkt niet, want op den duur wordt het licht weer uitgezonden (alhoewel op een andere golflengte), dus het werkt alleen als een vertraging.

- Er is ook wel gesteld, dat het door de expansie van het heelal komt. Dit zullen we verder onderzoeken.

- Verder is wel gesteld, dat sterren niet uniform door de ruimte verdeeld zijn. Maar vervang dan in de discussie overal sterren door melkwegstelsels.

Thermodynamica van het heelal

Neem een volume-element in het heelal. Daarin geldt de tweede hoofdwet der thermodynamica.

$$d(uV) + p\,dV = dQ$$

We hebben met straling te doen, dus p is de stralingsdruk ($p = u/3$).

De toename in de energie in straling dQ in een tijdje dt is

$$dQ = nVL\,dt$$

Dus

$$d(uV) + \frac{1}{3}u\,dV = nVL\,dt$$

Dan

$$u\,dV + V\,du + \frac{1}{3}u\,dV = \frac{4}{3}u\,dV + V\,du = nVL\,dt$$

$$\frac{4}{3}uV^{1/3}dV + V^{4/3}du = nV^{4/3}l\,dt$$

Dus

$$d\left(uV^{4/3}\right) = nLV^{4/3}dt$$

Laat ook het heelal expanderen, zodat $V = V_\circ\ t^{3\alpha}$ met $V_\circ$ een referentie volume op $t = 1$ (een later te kiezen tijdstip als we eenheden kiezen).

Dan $R = R_\circ\ t^\alpha$. De definitie van q geeft dan

$$q = -\frac{\ddot{R}R}{\dot{R}^2} = \frac{1}{\alpha} - 1$$

Voor een Einstein-de Sitter heelal ($q = \frac{1}{2}$) geldt dus $\alpha = 2/3$.
Voor $q \to 0$ krijgen we $\alpha \to 1$.
Een statisch heelal heeft $\alpha = 0$.

Verder ook $n \propto V^{-1}$ en dus $n = n_\circ\ t^{-3\alpha}$.

Om meer realistisch te zijn nemen we ook een eventueel effect mee van evolutie van de "bronnen". Dus $L = L_\circ\ t^\beta$.

Invullen geeft

$$d\left(uV_\circ^{4/3}t^{4\alpha}\right) = n_\circ\, L_\circ\, V_\circ^{4/3}t^{-3\alpha}t^{4\alpha}t^{\beta}$$
$$= n_\circ\, L_\circ\, V_\circ^{4/3}t^{\alpha+\beta}$$

Integreer dit

$$u\, t^{4\alpha} = \frac{n_\circ\, L_\circ}{1+\alpha+\beta}t^{\alpha+\beta}$$

Dus

$$u = \frac{n_\circ\, L_\circ}{1+\alpha+\beta}t^{1-3\alpha+\beta} = \frac{nL}{1+\alpha+\beta}t$$

Gebruik de gemiddelde tijdschaal tussen emissie en absorptie van een foton τ

$$\tau = \frac{\lambda}{c} = \frac{1}{n\sigma c}$$

Dus $u^* = L/\sigma c$ geeft $nL = u^*/\tau$ en dus

$$u = \frac{u^*}{1+\alpha+\beta}\,\frac{t}{\tau}$$

Nu wat getallen invullen.

- Expansie van het heelal $\alpha \approx 1$.
- Evolutie van melkwegstelsels $\beta \approx -0.5$.
- In sterren $\rho \approx 5 \times 10^{-28}$ kg m^{-3} ($\approx 0.1\rho_{\text{crit}}$) $= 2.5 \times 10^{-58}$ M$_\odot$ m^{-3}. Dus $n \approx 2.5 \times 10^{-58}$ m^{-3}.
- Voor de zon $\sigma = 1.5 \times 10^{18}$ m^2.

Dan

$$\tau = 8.9 \times 10^{30}\,\text{sec} = 2.8 \times 10^{23}\,\text{jaar}$$

Verder weten we $t \approx 2 \times 10^{10}$ jaar en dus

$$u \approx 5 \times 10^{-14} u^*$$

Dus de hemel is inderdaad wel donker.

De situatie $u = u^*$ kan zeker wel optreden, maar het duurt ongeveer 3×10^{23} jaar, dus veel langer dan het heelal oud is.

Dus er is lang niet genoeg tijd geweest voor de sterren om het heelal met straling te vullen. Het is 's nachts donker, omdat het heelal een eindige leeftijd heeft.

Overigens met behulp van de zon kunnen we u^* schatten als $u^* \approx 0.98$ J m^{-3}.

Wat betekent $u \approx 5 \times 10^{-14} u^*$ voor de helderheid van de hemel?

De zon heeft $m_\mathrm{B} = -26.20$.
De straal van de zon is ongeveer een halve graad; dus de ruimtehoek van de zon 2.5×10^6 arcsec^2.

Dus u^* moet corresponderen met een oppervlakte helderheid van

$$u^* \Rightarrow -26.2 + 2.5 \log(2.5 \times 10^6) = -10.2\ \mu_\mathrm{B}$$

Hier betekent μ_B B-magnituden arcsec^{-2}.

De voorspelde helderheid van de hemel is 5×10^{-14} hiervan en dus

$$u \Rightarrow -10.2 - 2.5 \log(5 \times 10^{-14}) = 23.1\ \mu_\mathrm{B}$$

Op donkere sterrenwachten meten we ongeveer 22.5 μ_B.

De oplossing van de paradox ligt niet in de roodverschuiving.

Neem maar eens een inkrimpend heelal, dus b.v. $\alpha = -2/3$. Dan voor $\beta = 0$

$$u \approx 2 \times 10^{-13} u^*$$

De vraag is ook of er ooit eerder een heldere hemel is geweest.

Met $n = n_\circ t^{-3\alpha}$ vinden we

$$u = \frac{nL}{1+\alpha+\beta} t = \frac{n_\circ L}{1+\alpha+\beta} t^{1-3\alpha}$$

Dus

$$\tau = \frac{t^{-3\alpha}}{n_\circ \sigma c}$$

Dus voor $\alpha < 1/3$ gaat $u \to \infty$ voor $t \to 0$.

We verwachten $u = u^*$ of $t = \tau$ voor $t = 6 \times 10^{-14}$ jaar.

Maar toen waren er nog geen sterren.