STERREN EN MELKWEGSTELSELS

7. Kosmologie

Piet van der Kruit
Kapteyn Astronomical Institute
University of Groningen
the Netherlands

Voorjaar 2007

Outline

Theorie

Kosmologisch principe

Dit is gebaseerd op waarnemingen stelt men dat het heel homogeen en isotroop is.

Isotroop wil zeggen hetzelfde in alle richtingen.

Homogeen wil zeggen hetzelfde op gelijke afstanden (=tijden).

Newtonse Kosmologie

De structuur van het heelal wordt bestudeerd met de veldvergelijkingen van Einstein's Algemene Relativiteitstheorie.

De belangrijkste zaken kunnen al bestudeerd worden met Newtonse gravitatie.

Neem een deel van het heelal met straal R en dichtheid $\rho(t)$. De massa daarin is

$$M = \frac{4\pi}{3} R^3 \rho(t)$$

M blijft constant met de tijd tijdens de expansie.

Aan het oppervlak van dit bolvormig volume geldt alleen de zwaartekracht naar binnen (de rest van het heelal oefent geen netto kracht uit).

Dus (kracht = versnelling; alles per massa-eenheid)

$$\ddot{R} + \frac{GM}{R^2} = 0$$

Of

$$\frac{\ddot{R}}{R} = -\frac{4\pi}{3}\rho$$

Integreer de eerste vergelijking ($dR = \dot{R}dt$)

$$\int \ddot{R}\dot{R}dt + \int GMR^{-2}dR = 0$$

Uitvoeren van deze integraal geeft rechts een constante, die volgt uit de Algemene Relativiteitstheorie (met k = -1, 0, +1)

$$\tfrac{1}{2}\dot{R}^2 - \frac{GM}{R} = \tfrac{1}{2}kc^2$$

Dan volgt het Newton equivalent van de veldvergelijking

$$\dot{R}^2 = \frac{8\pi}{3} G\rho(t) R^2 + kc^2 = \frac{2GM}{R} + kc^2 \tag{1}$$

Definieer de Hubble constante

$$H \equiv \frac{\dot{R}}{R}$$

en de deceleratieparameter

$$q \equiv -\frac{\ddot{R}R}{\dot{R}^2} = \frac{4\pi G\rho(t)}{3H^2}$$

Per definitie $q \geq 0$, maar verandert wel met de tijd.

Vul dit in in (1), dan

$$\dot{R}^2 = \frac{-kc^2}{1-2q} \tag{2}$$

- Kijk eerst naar het geval $k = 0$.

Dit heet het Kritisch of Einstein–de Sitter heelal.

Volgens (2) is $k = 0$ alleen mogelijk als $q = \frac{1}{2}$.

Dan zien we uit (1), dat $\dot{R} \propto R^{-1/2}$. Neem $R \propto t^x$ dan is gemakkelijk te zien, dat $x = 2/3$.

Oplossing van de veldvergelijking geeft dan

$$R = (6\pi G\rho)^{1/3} t^{2/3}$$

Uit de definitie van de Hubble constante volgt dan

$$\frac{1}{H} = \frac{R}{\dot{R}} = \frac{3}{2} t$$

Met $H = 70$ km s^{-1} Mpc^{-1} volgt $t = 9.3 \times 10^9$ jaar.

Invullen van $q = \frac{1}{2}$ in de definitie van q geeft

$$\rho_{\mathrm{crit}} = \frac{3H^2}{8\pi G}$$

Dit komt dan uit als 1.06×10^{-29} g cm^{-3}.

- Het geval $k = -1$.

Aangezien $\dot{R}^2$ natuurlijk positief is volgt uit (2), dat $q < \frac{1}{2}$.

Dan wordt (1)

$$\dot{R}^2 = 2GMR^{-1} - c^2$$

Dus we zien dan, dat als het heelal expandeert $\dot{R}$ kleiner wordt en op een gegeven moment 0. De expansie stopt dus en wordt gevolgd door contractie (de "Big Crunch").

De veldvergelijking is niet analytisch te integreren, dus er is geen eenvoudige formule voor de leeftijd. Deze is wel kleiner dan in het kritische geval.

- Het geval $k = +1$.

Aangezien $\dot{R}^2$ natuurlijk positief is volgt uit (2), dat $q > \frac{1}{2}$.

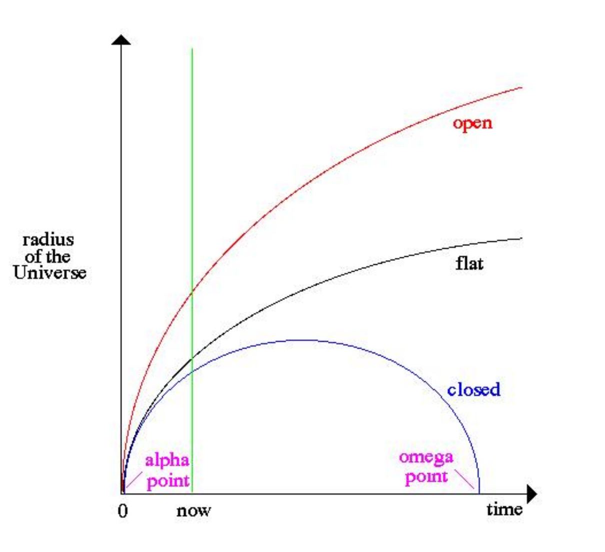
Dan wordt (1)

$$\dot{R}^2 = 2GMR^{-1} + c^2$$

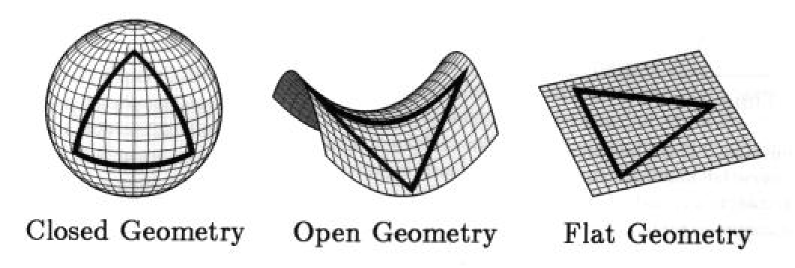
Dus met de expansie neemt $\dot{R}$ wel af, maar wordt nooit 0. De expansie gaat oneindig lang door.

Dit heet een open heelal.

De leeftijd is nu langer dan in het kritische geval.


radius
of the
Universe
open
flat
closed
alpha
point
omega
point
0
now
time

De Algemene Relativiteitstheorie beschrijft de kosmologie als een geometrie van het heelal.



De kosmologische parameters

In de moderne literatuur wordt in plaats van q vaker de dichtheidsparameter Ω gebruikt

$$\Omega = \frac{\rho}{\rho_{\mathrm{crit}}} = 2q$$

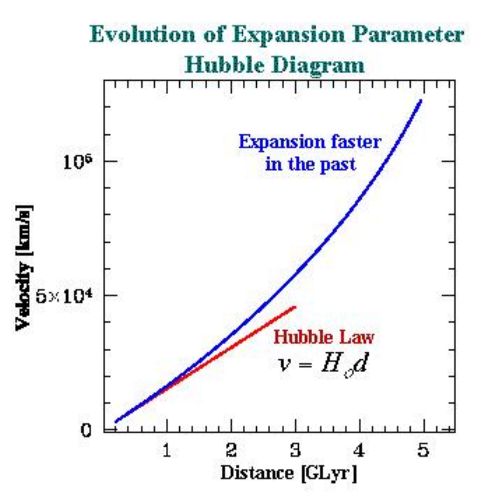
Als we alle bekende materie in het heelal optellen krijgen we $\Omega \approx 0.2$.

In de kosmologie ontstaat de roodverschuiving doordat alles de expansie van de ruimte volgt. Dus eigenlijk is het fysisch iets anders dan het Doppler-effect.

$$z = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\dot{R}}{c} = HR$$

Ω of q kunnen ook bepaald worden uit de geometrie.

Immers als z groot wordt zien we stelsels op een moment, dat de expansie groter was.



De kromming van de lijn hangt af van de waarde van Ω.

Einstein kon geen statische oplossing vinden van zijn veldvergelijkingen.

De Sitter (leerling van Kapteyn en directeur in Leiden) liet zien, dat het wel kon met een expanderend heelal.

Einstein voerde echter de kosmologische constante Λ in. Dan wordt de begin-vergelijking

$$\frac{\ddot{R}}{R} = -\frac{4\pi}{3}\rho R + \frac{\Lambda c^2}{3}$$

Het is een soort extra afstotende kracht, onafhankelijk van de afstand.

Men splitst dan Ω wel in een deel als gevolg van de materie (als we eerst hadden) en een deel afkomstig van Λ

$$\Omega_\Lambda = \frac{\Lambda}{3H^2}$$

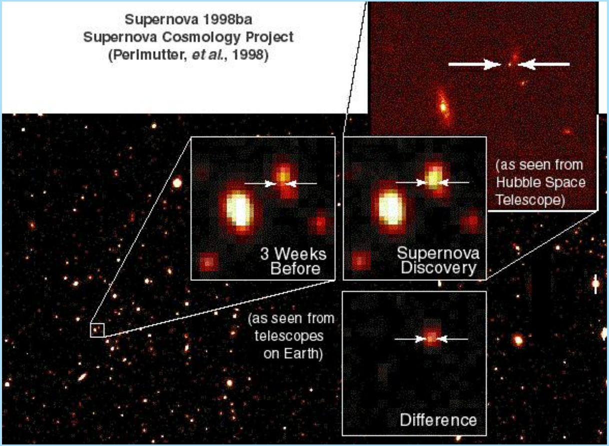
Dat heeft ook effect op het Hubble diagram.

Het Hubble diagram is moeilijk te gebruiken voor melkwegstelsels, want de evolutie effecten zijn moeilijk te scheiden (en zijn zeker vergelijkbaar met) de kosmologische effecten.

Een uitkomst zijn Supernovae Type Ia, dus afkomstig van explosies in dubbelsterren met massa-overdracht.

Deze hebben waarschijnlijk altijd dezelfde helderheid in het maximum.

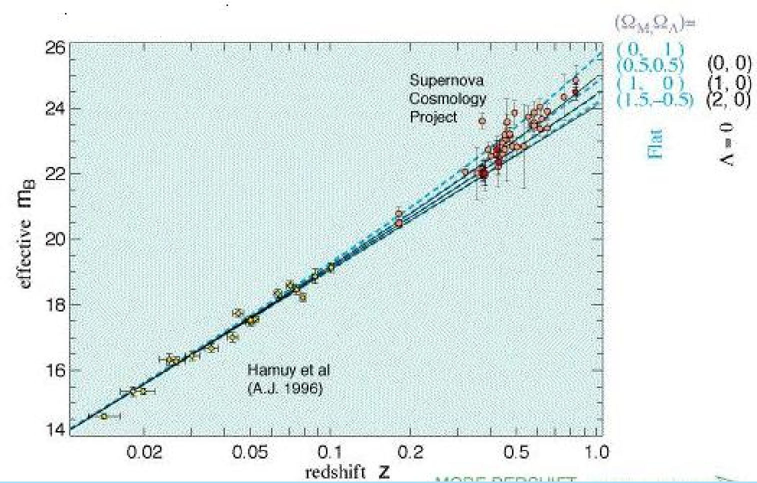
Men kan ze nu met speciale zoekprogramma's vinden tot op hoge roodverschuiving.



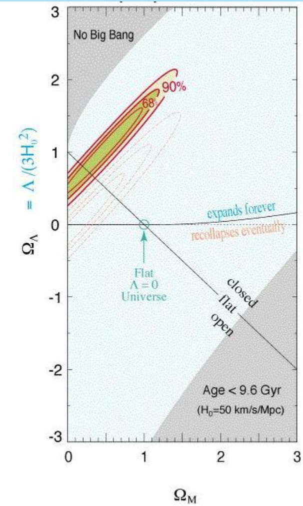
Het Hubble diagram geeft dan geen goede fit zonder kosmologische constante.

Volgens deze metingen zou de expansie van het heelal versnellen.

Het effect is maar een paar tienden van een magnitude!


$(\Omega_M, \Omega_\Lambda)$=
(0, 1)
(0.5,0.5)
(1, 0)
(1.5,–0.5)
(0, 0)
(1, 0)
(2, 0)
Flat
$\Lambda = 0$
Supernova
Cosmology
Project
Hamuy et al
(A.J. 1996)
effective m_B
redshift z
26
24
22
20
18
16
14
0.02
0.05
0.1
0.2
0.5
1.0

Het diagram hiernaast geeft de positie van het heelal volgens het Hubble diagram volgens de supernovae in het $\Omega_\Lambda - \Omega_{\mathrm{Matter}}$ vlak.



Het is nodig om additionele beperkingen te vinden.

Het concordantie-model neemt alle relevante metingen mee (o.a. fluctuaties in de cosmologische achtergrond; zie hieronder).

Dit geeft:

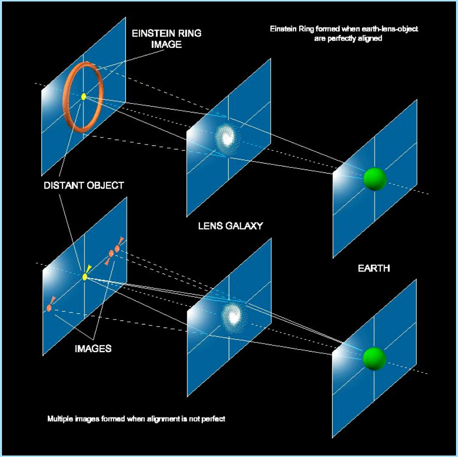
$$
\begin{aligned}
\Omega_{\mathrm{tot}} &= 1.02 \pm 0.02 \\
\Omega_{\mathrm{baryon}} &= 0.044 \pm 0.004 \\
\Omega_{\mathrm{darkmatter}} &= 0.23 \pm 0.04 \\
\Omega_{\mathrm{darkenergy}} &= 0.73 \pm 0.04 \\
H &= 71 \pm 3 \mathrm{km\ sec}^{-1}\ \mathrm{Mpc}^{-1} \\
T &= 13.7 \pm 0.3\ \mathrm{jaar}
\end{aligned}
$$

Gravitatielenzen

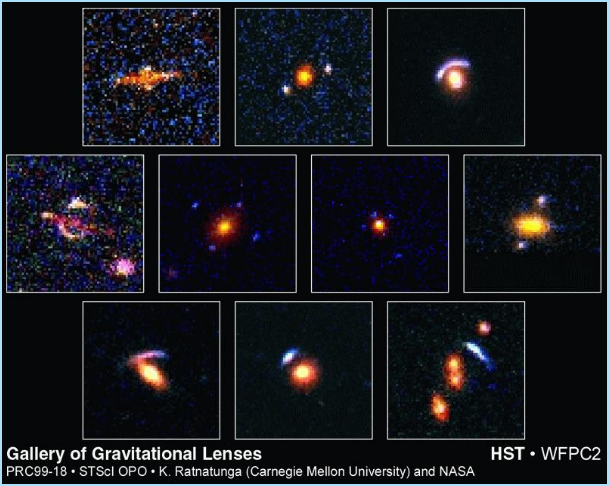
Men kan thans verweg liggende stelsels en quasars bestuderen via gravitatielenzen.

In deze schets gaat het om een lens die effectief een puntmassa is.

Over het algemeen wordt het achtergrondstelsel meerdere malen afgebeeld.



Er zijn diverse gravitatielenzen waargenomen.

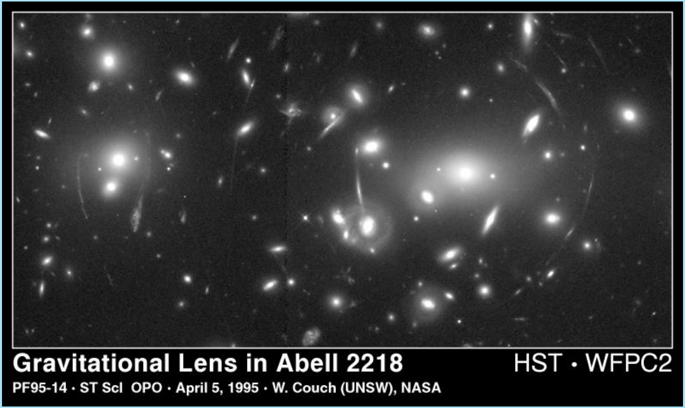


Ze kunnen ook gebruikt worden om de massa van de lens te bepalen.

En als de bron variabel is (een quasar is dat vaak) kan uit tijdsverschillen de Hubble constante en bij hoge roodverschuiving de dichtheidsparameter worden gemeten.

Clusters van melkwegstelsels kunnen als geheel ook als gravitatielenzen optreden.

Omdat het dan om een uitgesmeerde massa gaat zijn de beelden eerder kleine boogjes ("arcs") geworden.



Hiermee kan de massa van de cluster worden bepaald. Men vindt dan, dat de cluster grote hoeveelheden donkere materie moet bevatten. Dit is veel meer uitgesmeerd dan de massa in de stelsels.

Overigens had men daarvoor al aanwijzingen gevonden uit de bewegingen van de stelsels in de cluster.

Hiervoor begruikt men weer het viriaal theorema voor stabiliteit $2T + \Omega \approx 0$.

$$2T = \sum mV^2 \approx M\langle V^2 \rangle \approx -\Omega \approx \frac{3GM}{5R}$$

Hierin is $\langle V^2 \rangle$ de gemiddelde onderlinge snelheid (ook wel snelheidsdispersie).

Dan is de massa van de cluster

$$M \approx \frac{5\langle V^2 \rangle R}{3G}$$

De Big Bang

Toen het heelal heel jong was, was het erg heet.

Na drie minuten recombineerde de protonen en neutronen en vormden helium.

Dit in een verhouding ruwweg 75% waterstof en 25% helium. Deze verhouding zien we nu nog.

Dit komt uit de verhouding tussen protonen en neutronen, zoals die door de zwakke wisselwerking werden onderhouden.

Deze verhouding volgt direct uit de theorie van deze wisselwerking.

Zwaardere elementen konden niet gevormd worden wegens de afwezigheid in de natuur van elementen met massanummers 5 en 8.

Er waren ook zeer grote hoeveelheden neutrino's, die nu allemaal nog bestaan.

Er was ook zeer veel straling, die in interactie was met de materie (absorptie en emissie).

Het heelal was dus ondoorzichtig tot het zover was geëpandeerd, dat het doorzichtig werd (na ongeveer 10^5 jaar).

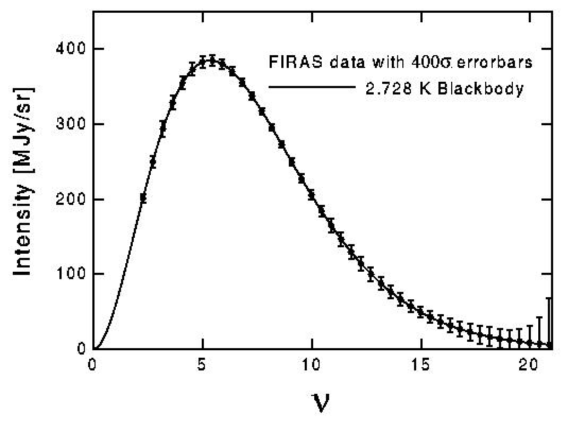
Daarna bewogen de fotonen vrij door het heelal en werden niet meer geabsorbeerd.

We zien dat in de kosmologische achtergrondstraling, die vrijwel uniform is.

De temperatuur ervan volgt nauwkeurig die van een perfect zwarte lichaam.

De temperatuur is 2.726 ± 0.010 K.

Het stralingsveld is in de loop der tijd afgekoeld door de expansie van het heelal.



Volgens de thermodynamica

$$d(uV) + p\,dV = dQ$$

Hier is u de energiedichtheid (hier dus van straling, d.w.z. $u = aT^4$), V het volume, p de druk (stralingsdruk $u/3$) en dQ de energie toename (en die is 0). Dus

$$\frac{4}{3}u\,dV + V\,du = 0$$

Neem een bolvormig volume met straal R

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 \;\;;\;\; dV = 4\pi R^2 dR$$

We hebben

$$u = aT^4 \;\; ; \;\; du = 4aT^3 dT$$

Dus

$$\frac{4}{3} a T^4 4\pi R^2 dR + \frac{4}{3}\pi R^3 4 a T^3 dT = 0$$

$$T\ dR + R\ dT = 0$$

$$\frac{dT}{T} = -\frac{dR}{R}$$

Integreer

$$\ln T = -\ln R \qquad T \propto R^{-1}$$

$T = \infty$ voor $R = 0$ en $T = 0$ voor $R = \infty$

Dus het kosmologische stralingsveld koelt af, omdat het volume bij de expansie groter wordt.

Dit komt ook neer op $\lambda \propto R$. Dus de straling expandeert mee met het heelal.

Over de hemel zijn er slechts zeer kleine temperatuur verschillen.

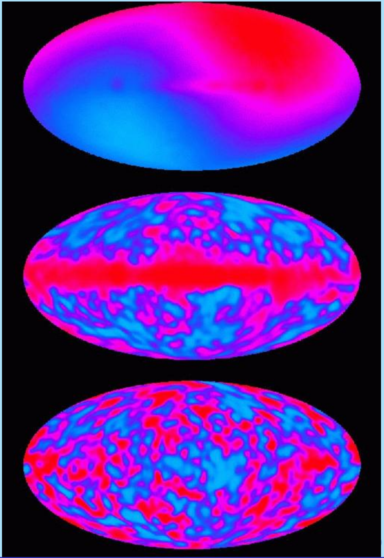
De belangrijkste component is de zogenaamde dipool.

Deze komt, omdat ons Melkwegstelsel een snelheid heeft van ongeveer 500 km s^{-1} t.o.v. de kosmologische achtergrond.

Trekken we dat af, dan zien we nog een component van de straling van ons eigen Melkwegstelsel.

Correctie daarvoor geeft dan fluctuaties op het niveau van 1 op 100.000.

Dit is de eerste structuur in het heelal, waaruit uiteindelijk de huidige structuur is voortgekomen.



Tegenwoordig heeft men instrumentatie om op grote schaal de roodverschuiving van melkwegstelsels te meten.

Dit geeft een drie-dimensionaal beeld van het heelal.

Dan blijkt er tot op grote schaal structuur te bestaan.

Uit metingen van de bewegingen in de omgeving en afstanden uit de Tully-Fisher relatie vindt men, dat er een grote concentratie van massa moet zijn, die ons aantrekt.

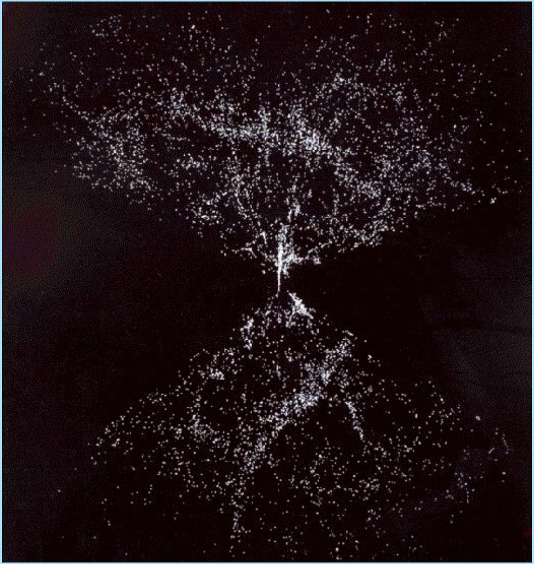
De richting is in de richting van de Melkweg, dus we kunnen het niet direct waarnemen.

Men noemt dit de Great Attractor, die ligt op een afstand van zo'n 65 Mpc en een massa heeft van de orde van $10^{16} M_{\odot}$.

De inval naar de Great Attractor lijkt verantwoordelijk voor de snelheid, die wij hebben t.o.v. de kosmologische achtergrond.

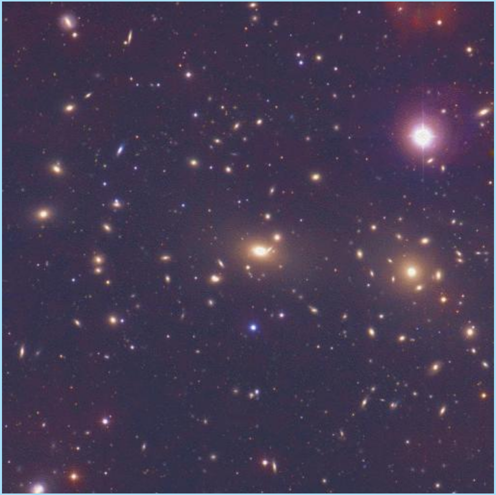
Hieronder het resultaat van een survey van zo'n 11.000 stelsels tot een roodverschuiving van ongeveer 15.000 km s^{-1}.

Op een roodverschuiving van ongeveer 8000 km s^{-1} zien we de Great Wall.



Waarom is het 's nachts donker?

(Niet voor tentamen)



Olbers' Paradox

Deze paradox is geformuleerd door Kepler (1610), Halley (1720), Cheseaux (1744) en Olbers (1823).

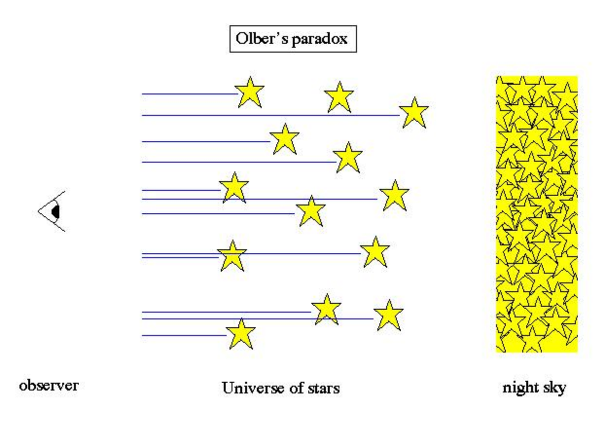
Neem aan, dat alle sterren een lichtkracht L hebben en uniform met dichtheid n door de ruimte verdeeld liggen.

Van een schil met straal r en dikte dr is de totale helderheid

$$L(r) = 4\pi r^2 \, dr \; n \frac{L}{4\pi r^2} = nL \, dr$$

Als je dit optelt over alle schillen met r van 0 tot ∞, krijg je dus een oneindig heldere hemel!

Eigenlijk moet je rekening houden met de eindige afmeting van sterren; dan nog vind je, dat de hemel net zo helder moet zijn als het oppervlak van de zon.



Om het te begrijpen formuleren we het thermodynamisch.

Van elke ster ontvangen we op aarde $L/(4\pi r^2)$ J sec^{-1} cm^{-2}.

Dus door een oppervlakje met diameter $d\sigma$ is de energie, die er per seconde door gaat

$$\frac{L d\sigma}{4\pi r^2}$$

Deze energie vult in een tijdje dt een cylindertje met doorsnede $d\sigma$ en lengte $c\ dt$.

Dus de energie-dichtheid t.g.v. een ster op afstand r is

$$\frac{L\ d\sigma}{4\pi r^2}\ dt\ \frac{1}{c\ dt\ d\sigma} = \frac{L}{4\pi r^2 c}$$

In de schil zijn $4\pi r^2 n\, dr$ sterren en dus is de bijdrage aan de lokale energie-dichtheid u

$$du = \frac{4\pi r^2 n\, dr\, L}{4\pi r^2 c} = \frac{nL}{c} dr$$

Maar sterren kunnen ook licht onderscheppen.

Als hun straal R is, is de werkzame doorsnede $\sigma = \pi R^2$ (en dus hun "echte" oppervlak 4σ).

In een cylindertje $d\sigma\, dl$ is dus de totale werkzame doorsnede $n\sigma\, d\sigma\, dl$.

De kans op onderschepping van het licht is dan de totale doorsnede $d\sigma$ gedeeld door de totale werkzame doorsnede

$$\frac{n\sigma \; d\sigma \; dl}{d\sigma} = n\sigma \; dl$$

De gemiddelde vrije weglengte λ is die dl, waarvoor die kans 1 is. Dus

$$\lambda = (n\sigma)^{-1}$$

Als er m fotonen over een afstand r reizen zijn er volgens Poisson statistiek dan nog $m\mathrm{e}^{-r/\lambda}$ over.

Dus zal de bijdrage aan de energie-dichtheid $(nL/c)dr$, die van afstand r komt, gereduceerd worden met deze factor.

$$du = \frac{nL}{c}\mathrm{e}^{-r/\lambda}dr$$

Integreer dit

$$u = \int_{r=0}^{r=\infty} du = \frac{nL}{c}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-r/\lambda}dr = \frac{nL\lambda}{c} = \frac{L}{\sigma c}$$

Aan het oppervlak van elke ster met een zekere effectieve temperatuur is de energie-dichtheid in straling gelijk aan die van het zwarte lichaam van die temperatuur

$$u^* = aT_{\mathrm{eff}}^4$$

Dan is

$$L = 4\sigma \frac{ac}{4} T_{\mathrm{eff}}^4$$

en dus

$$u^* = \frac{L}{\sigma c}$$

Dus de paradox is, dat

$$u = u^*$$

De energie-dichtheid in het heelal zou overal hetzelfde moeten zijn als aan het oppervlak van de sterren!

Oplossingen van Olbers' Paradox

- Kepler en Halley concludeerden, dat dus het heelal eindig moest zijn.
- Cheseuax veronderstelde, dat de verzwakking van het licht een klein beetje sneller ging dan met r^{-2}.
- Olbers stelde, dat interstellaire materie licht zou absorberen. Dit werkt niet, want op den duur wordt het licht weer uitgezonden (alhoewel op een andere golflengte), dus het werkt alleen als een vertraging.
- Er is ook wel gesteld, dat het door de expansie van het heelal komt. Dit zullen we verder onderzoeken.
- Verder is wel gesteld, dat sterren niet uniform door de ruimte verdeeld zijn. Maar vervang dan in de discussie overal sterren door melkwegstelsels.

Thermodynamica van het heelal

Neem een volume-element in het heelal. Daarin geldt de tweede hoofdwet der thermodynamica.

$$d(uV) + p\,dV = dQ$$

We hebben met straling te doen, dus p is de stralingsdruk ($p = u/3$).

De toename in de energie in straling dQ in een tijdje dt is

$$dQ = nVL\,dt$$

Dus

$$d(uV) + \frac{1}{3}u\ dV = nVL\ dt$$

Dan

$$u\ dV + V\ du + \frac{1}{3}u\ dV = \frac{4}{3}u\ dV + V\ du = nVL\ dt$$

$$\frac{4}{3}uV^{1/3}dV + V^{4/3}du = nV^{4/3}l\ dt$$

Dus

$$d\left(uV^{4/3}\right) = nLV^{4/3}dt$$

Laat ook het heelal expanderen, zodat $V = V_\circ \, t^{3\alpha}$ met $V_\circ$ een referentie volume op $t = 1$ (een later te kiezen tijdstip als we eenheden kiezen).

Dan $R = R_\circ \, t^{\alpha}$. De definitie van q geeft dan

$$q = -\frac{\ddot{R} R}{\dot{R}^2} = \frac{1}{\alpha} - 1$$

Voor een Einstein-de Sitter heelal ($q = \frac{1}{2}$) geldt dus $\alpha = 2/3$.
Voor $q \rightarrow 0$ krijgen we $\alpha \rightarrow 1$.
Een statisch heelal heeft $\alpha = 0$.

Verder ook $n \propto V^{-1}$ en dus $n = n_\circ \, t^{-3\alpha}$.

Om meer realistisch te zijn nemen we ook een eventueel effect mee van evolutie van de "bronnen". Dus $L = L_\circ \, t^\beta$.

Invullen geeft

$$\begin{aligned} d\left(uV_\circ^{4/3}t^{4\alpha}\right) &= n_\circ \, L_\circ \, V_\circ^{4/3} t^{-3\alpha} t^{4\alpha} t^{\beta} \\ &= n_\circ \, L_\circ \, V_\circ^{4/3} t^{\alpha+\beta} \end{aligned}$$

Integreer dit

$$u \; t^{4\alpha} = \frac{n_\circ \, L_\circ}{1+\alpha+\beta} t^{\alpha+\beta}$$

Dus

$$u = \frac{n_\circ \, L_\circ}{1+\alpha+\beta} t^{1-3\alpha+\beta} = \frac{nL}{1+\alpha+\beta} t$$

Gebruik de gemiddelde tijdschaal tussen emissie en absorptie van een foton τ

$$\tau = \frac{\lambda}{c} = \frac{1}{n\sigma c}$$

Dus $u^* = L/\sigma c$ geeft $nL = u^*/\tau$ en dus

$$u = \frac{u^*}{1+\alpha+\beta}\,\frac{t}{\tau}$$

Nu wat getallen invullen.

- Expansie van het heelal $\alpha \approx 1$.
- Evolutie van melkwegstelsels $\beta \approx -0.5$.
- In sterren $\rho \approx 5 \times 10^{-28}$ kg m^{-3} ($\approx 0.1\rho_{\rm crit}$) $= 2.5 \times 10^{-58}$ M$_\odot$ m^{-3}. Dus $n \approx 2.5 \times 10^{-58}$ m^{-3}.
- Voor de zon $\sigma = 1.5 \times 10^{18}$ m^2.

Dan

$$\tau = 8.9 \times 10^{30} \text{ sec } = 2.8 \times 10^{23} \text{ jaar}$$

Verder weten we $t \approx 2 \times 10^{10}$ jaar en dus

$$u \approx 5 \times 10^{-14} u^*$$

Dus de hemel is inderdaad wel donker.

s

De situatie $u = u^*$ kan zeker wel optreden, maar het duurt ongeveer 3×10^{23} jaar, dus veel langer dan het heelal oud is.

Dus er is lang niet genoeg tijd geweest voor de sterren om het heelal met straling te vullen.
Het is 's nachts donker, omdat het heelal een eindige leeftijd heeft.

Overigens met behulp van de zon kunnen we u^* schatten als $u^* \approx 0.98$ J m^{-3}.

Wat betekent $u \approx 5 \times 10^{-14} u^*$ voor de helderheid van de hemel?

De zon heeft $m_{\rm B} = -26.20$.
De straal van de zon is ongeveer een halve graad; dus de ruimtehoek van de zon 2.5×10^6 arcsec^2.

Dus u^* moet corresponderen met een oppervlakte helderheid van

$$u^* \Rightarrow -26.2 + 2.5 \log(2.5 \times 10^6) = -10.2 \ \mu_{\rm B}$$

Hier betekent $\mu_{\rm B}$ B-magnituden arcsec^{-2}.

De voorspelde helderheid van de hemel is 5×10^{-14} hiervan en dus

$$u \Rightarrow -10.2 - 2.5 \log(5 \times 10^{-14}) = 23.1 \ \mu_{\rm B}$$

Op donkere sterrenwachten meten we ongeveer 22.5 μ_{B}.

De oplossing van de paradox ligt niet in de roodverschuiving.

Neem maar eens een inkrimpend heelal, dus b.v. $\alpha = -2/3$. Dan voor $\beta = 0$

$$u \approx 2 \times 10^{-13} u^*$$

De vraag is ook of er ooit eerder een heldere hemel is geweest.

Met $n = n_\circ t^{-3\alpha}$ vinden we

$$u = \frac{nL}{1+\alpha+\beta} t = \frac{n_\circ L}{1+\alpha+\beta} t^{1-3\alpha}$$

Dus

$$\tau = \frac{t^{-3\alpha}}{n_\circ \sigma c}$$

Dus voor $\alpha < 1/3$ gaat $u \rightarrow \infty$ voor $t \rightarrow 0$.

We verwachten $u = u^*$ of $t = \tau$ voor $t = 6 \times 10^{-14}$ jaar.

Maar toen waren er nog geen sterren.