STERREN EN MELKWEGSTELSELS

1. Eigenschappen van sterren: Hertzsprung–Russell diagram

Piet van der Kruit
Kapteyn Astronomical Institute
University of Groningen
the Netherlands

Voorjaar 2007

Stralingstheorie

Ruimtehoek

Voor het volgende hebben we het begrip ruimtehoek nodig.

Dit is het twee-dimensionale equivalent van een gewone hoek.

We kijken nu naar deel het oppervlak van een bol dat bij de ruimtehoek hoort.

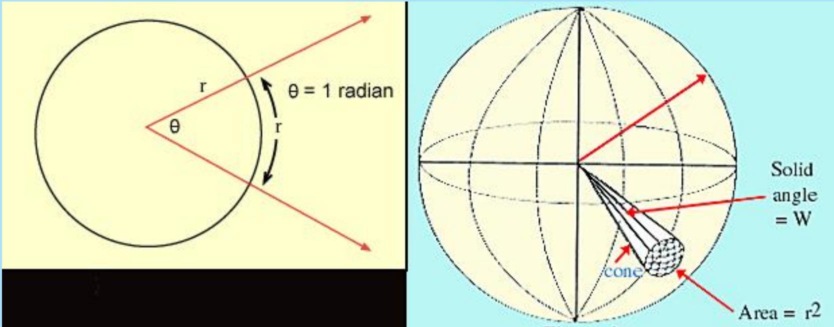


Figure 4
Solid angle of one steradian

De eenheid van ruimtehoek is de steradiaal.

Als voor een hoek de boog langs de cirkel gelijk is aan de straal r, is de hoek 1 radiaal.

De volle omtrek is $2\pi r$. Er gaan dus 2π radialen in een volle hoek van 360°.

Net als voor een gewone hoek de volledige cirkel 2π radialen is, is voor de ruimtehoek de volledige bol 4π steradialen, omdat het oppervlak van een bol $4\pi r^2$ is.

Men gebruikt ook vierkante graad, boogminuut, enz.

Conversie: 1 ster $= 3282.8$ deg^2 $= 1.18 \times 10^7$ arcmin^2 $= 4.25 \times 10^{10}$ arcsec^2.

Intensiteit en flux

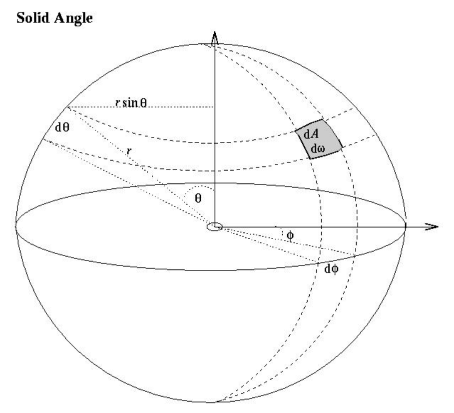
Intensiteit

Dit is de energie, die in een tijdsinterval van 1 seconde door een oppervlak van 1 m^2 stroomt uit een ruimtehoek van 1 steradiaal in een bandbreedte van 1 Hz.

Dus de eenheid is I_ν in W m^{-2} $ster^{-1} Hz^{-1}$.

Flux

Dit is de intensiteit geïntegreerd over alle ruimtehoeken.



De straling valt onder een hoek θ op het vlakje dA en loodrecht op de stralingsrichting is het dan $dA \cos\theta$.

Het ruimtehoekje is $d\omega = d\theta d\phi \sin\theta$.

Dus de flux in vanuit één halve bol is

$$\pi F_\nu = \int_{\theta=0}^{\pi/2} \int_{\phi=0}^{2\pi} I_\nu(\theta,\phi) \sin\theta \cos\theta d\theta d\phi$$

De factor π ontstaat omdat voor een uniforme intensiteit over een halve bol

$$\begin{aligned} \pi F_\nu &= I_\nu \int_{\theta=0}^{\pi/2} \int_{\phi=0}^{2\pi} \sin\theta \cos\theta d\theta d\phi \\ &= \pi I_\nu \end{aligned}$$

Fluxdichtheid

Dit is de straling ontvangen van een object.

Als het object een ruimtehoek $d\omega$ omvat is de fluxdichtheid

$$S_\nu = \int I_\nu d\omega$$

Voor een bolvormige ster met straal R op afstand D en uniforme flux aan het oppervlak wordt dit

$$S_\nu = \pi \frac{R^2}{D^2} F_\nu$$

Absorptiecoëfficiënt en optische diepte

Als straling met een intensiteit I_ν door een medium beweegt kan er straling geabsorbeerd worden.

De absorptie coëfficiënt κ_ν is dan de fractie, die over een eenheid van afstand wordt afgenomen.

Dus voor een afstandje dr geldt dat

$$\frac{I_\nu(r+dr) - I_\nu(r)}{I_\nu(r)} = \frac{dI_\nu}{I_\nu(r)} \equiv -\kappa_\nu(r)dr$$

Als de absorberende laag zich uitstrekt van $r = 0$ tot $r = s$, dan kan dit geïntegreerd worden tot

$$\begin{aligned}\int_{r=0}^{r=s} \frac{1}{I_\nu(r)} dI_\nu &= \ln I_\nu(s) - \ln I_\nu(0) \\ &= \int_{r=0}^{r=s} -\kappa_\nu(r) dr \equiv -\tau_\nu\end{aligned}$$

Dus

$$\frac{I_\nu(s)}{I_\nu(0)} = \mathrm{e}^{-\tau_\nu}$$

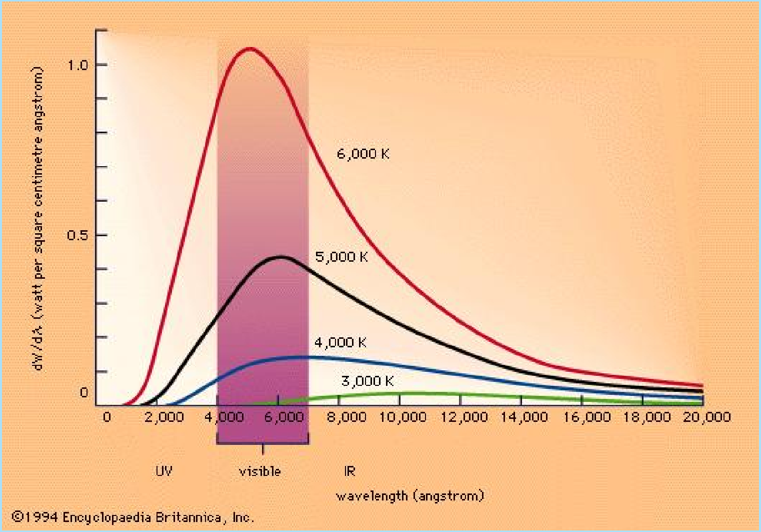
τ_ν heet de optische diepte.

Zwarte-lichaamstraling

Een zwart lichaam zendt electromagnetische straling uit volgens de stralingswet van Planck, afhankelijk van de temperatuur T:

$$F_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2}\frac{1}{e^{h\nu/kT}-1}$$

met F_ν de flux (meestal in Joule sec^{-1} m^{-2} Hz^{-1}), h de constante van Planck en c de lichtsnelheid.


dW/dλ (watt per square centimetre angstrom)
1.0
0.5
0
6,000 K
5,000 K
4,000 K
3,000 K
0
2,000
4,000
6,000
8,000
10,000
12,000
14,000
16,000
18,000
20,000
UV
visible
IR
wavelength (angstrom)
©1994 Encyclopaedia Britannica, Inc.

Benaderingen zijn:

De wet van Wien ($h\nu/kT \gg 1$):

$$F_\nu(T) = \frac{2h\,\nu^3}{c^2}\;\mathrm{e}^{-h\nu/kT}$$

De wet van Rayleigh-Jeans ($h\nu/kT \ll 1$):

$$F_\nu(T) = \frac{2\nu^2 kT}{c^2}$$

De verplaatsingswet van Wien geeft de golflengte van het maximum:

$$\lambda_{\rm max} = \frac{hc}{3kT}$$

De uitgezonden flux over alle golflengten volgt uit de stralingswet van Stefan–Boltzmann:

$$\pi F = \sigma T^4$$

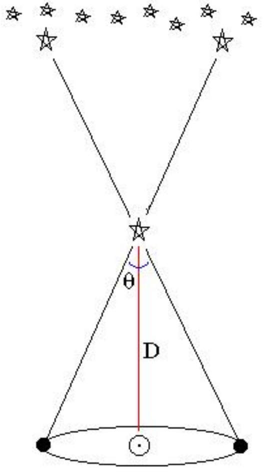
Helderheid van sterren

Parsec

Om absolute, fysische grootheden van sterren te bepalen hebben we afstanden nodig.

Voor de dichtsbijzijnde sterren gaat dit volgens de *trigoniometrische parallax*.

Door de beweging van de aarde om de zon beschrijft zo'n ster een ellipsje t.o.v. de achtergrond.



Parallax

De halve lange as daarvan ($\theta/2$) is de parallax.

De afstand is per definitie 1 parsec (pc) als de parallax 1 boogseconde is.

De tangens van de parallax is 1 A.U. gedeeld door de afstand r (D in de figuur).

Voor kleine hoeken is de tangens gelijk aan de hoek zelf (in radialen), dus er gaan evenveel A.U. in 1 pc als boogseconden in een radiaal.

$$1 \text{ pc} = 3.1 \times 10^{13} \text{ km} = 2 \times 10^{5} \text{ A.U.}$$

De dichtsbijzijnde ster heeft een afstand van 1.3 pc en dus een parallax van $0.75''$.

Soms wordt ook het lichtjaar gebruikt (de afstand, die het licht in 1 jaar aflegt; 0.95 $\times 10^{13}$ km; 1 pc $=$ 3.26 lj).

Schijnbare magnitude en kleurindex

De magnitude is een maat voor de (schijnbare) helderheid van sterren.

Het is een relatieve maat.

Bij fluxdichtheden S_1 en S_2 zijn de magnituden gedefinieerd als

$$m_1 - m_2 = -2.5 \log \frac{S_1}{S_2}$$

Dus 5 magnitude is een factor 100 en 1 magnitude een factor ongeveer 2.5.
Denk aan het teken: een zwakke ster heeft een grote waarde van de magnitude.

Het nulpunt is vastgelegd met fluxstandaarden.

De keuze van het nulpunt is zo, dat de helderste sterren ongeveer magnitude 0 hebben.

Voor de zon is de schijnbare magnitude -26 en de zwakste sterren, die met het blote oog zichtbaar zijn, +6.

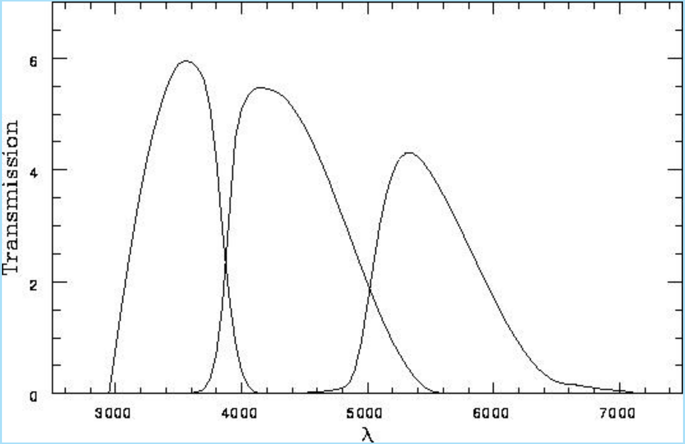
Met grote teleskopen haalt men magnitudes hoog in de 20.

In de praktijk worden magnituden bepaald met vaste golflengte gebieden.

Begin twintigste eeuw waren dat $m_{\rm v}$ (visueel), $m_{\rm pg}$ (fotografisch) en $m_{\rm pv}$ (foto-visueel), met een fotografische emulsie, die ongeveer de golflengte-gevoeligheid van het oog had.

Tegenwoordig zijn er meerdere systemen. De belangrijkste is *Johnson UBV*.

Hierzijn de banden U (ultraviolet), B (blauw)en V (visueel).



Dit systeem is overigens uitgebreid naar andere golflengten.

In ronde getallen:

Band	$\lambda_{\mathrm{centraal}}$	λ bereik
U	$\sim$ 3650 Å	3200 – 3900 Å
B	$\sim$ 4400 Å	3900 – 5000 Å
V	$\sim$ 5300 Å	5100 – 6000 Å
R	$\sim$ 7000 Å	5900 – 7100 Å
I	$\sim$ 9000 Å	7600 Å – 1.0 μ
J	$\sim 1.25\mu$	1.04 – 1.42 μ
K	$\sim 2.2\mu$	2.0 – 2.5 μ

Kleurindex

Met magnitudes kunnen ook kleurindices gemaakt worden, zoals $(B - V)$, d.w.z. verschillen van magnituden.

Dit zijn eigenlijk *verhoudingen* van fluxdichtheden.

Kleurindices geven dus informatie over de relatieve helderheid in de twee golflengtegebieden en daardoor voor de temperatuur van de ster.

Per definitie zijn de kleurindices van een zogenaamde A0V-ster (we komen hieronder op betekenis hiervan) gelijk aan 0.
Het is gebruikelijk de meest blauwe magnitude voorop te zetten.
Daardoor is een grote (positieve) waarde van de kleurindex een rode kleur.

Absolute en bolometrische magnitude

Absolute magnitude is een maat voor de intrinsieke helderheid van een ster.

Het is per definitie de magnitude, die de ster zou hebben op een afstand van 10 pc (deze definitie komt overigens van Kapteyn).

Met r in pc en M de absolute magnitude krijgen we dus

$$m - M = 2.5 \log \left(\frac{r}{10} \right)^2 = -5 + 5 \log r$$

$m - M$ heet de *afstandsmodulus*.

Voor de zon $m_{\rm v} = -27$, $M_{\rm v} = +4.8$.

Bolometrische magnitude

De bolometrische magnitude is die gemeten over *alle* golflengten en gecorrigeerd voor de effekten van de aard-atmosfeer.

De *bolometrische correctie* is

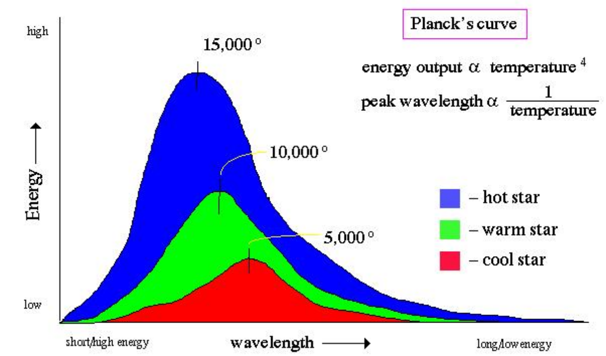
$$\mathrm{BC} = m_{\mathrm{v}} - m_{\mathrm{bol}}$$

Per definitie is $\mathrm{BC} = 0$ voor de zon.

De BC verschilt met type ster en is nodig om theoretische modellen van sterren met waarnemingen te vergelijken.

Effectieve temperatuur en kleurtemperatuur

Een zwart lichaam zendt electromagnetische straling uit volgens de stralingswet van Planck, afhankelijk van de temperatuur.



De uitgezonden flux over alle golflengten volgt uit de stralingswet van Stefan–Boltzmann:

$$\pi F = \sigma T^4$$

Als de straal van een bolvormig zwart lichaam R is en het oppervlak dus $4\pi R^2$, dan is de totale hoeveelheid uitgezonden straling (Joule per seconde)

$$L = 4\pi R^2 \sigma T^4$$

Uit de lichtkracht L van een ster (die ongeveer een zwart lichaam is) definiëren we de effectieve temperatuur als

$$T_{\rm eff} = \sqrt[4]{\frac{L}{4\pi\sigma R^2}}$$

Voor de zon is $T_{\rm eff}$ ongeveer 5800 K.

Kleurtemperatuur

Aangezien sterren ongeveer als een zwart lichaam stralen, moeten kleurindices ook een maat voor de temperatuur zijn.

Als we de wet van Wien gebruiken (voor $h\nu/kT \gg 1$; hetgeen eigenlijk niet altijd waar is), dan

$$V = \frac{1.562}{\lambda_V T} + \text{ constante}$$

$$B = \frac{1.562}{\lambda_B T} + \text{ constante}$$

Met $\lambda_B \approx 4400$ Å, $\lambda_V \approx 5500$ Å en wetende dat $(B - V) = 0$ voor een A0V ster met $T \approx 15000$ K) vinden we dan

$$(B - V) \approx 7000 \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{15000} \right)$$

$$(U - B) \approx 7300 \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{15000} \right)$$

Classificatie van sterren

De spectra van sterren kunnen heel sterk verschillen wat betreft de absorptielijnen, die erin voorkomen.

Deze absorptielijnen ontstaan in de "atmosfeer" van de ster, waar atomen en ionen het licht van het oppervlak absorberen.

Het oppervlak vinden we bij de straal, waar het licht dat wordt uitgezonden over het algemeen de ster kan verlaten.

Onder het oppervlak wordt het weer geabsorbeerd voordat het de ster verlaat en dat kunnen we dus nooit zien.

Welke lijnen voorkomen hangt vooral af van de temperatuur rond het oppervlak en veel minder van welke elementen er voorkomen.

O.a. komt dit door de ionisatie, die voor verschillende elementen bij sterk verschillende energieën optreden.

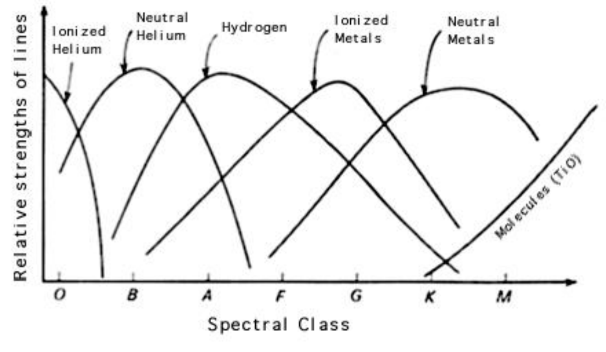
Notatie is b.v. CaI voor neutrale calcium, CaII voor Ca^{+}, CaIII voor Ca^{++}, enz.
De spectraaltypen zijn ingedeeld met een letter, gevolgd door een fijnere onderverdeling met een cijfer van 0 tot 9.

Dit is historisch gegroeid; met de eerste pogingen onderscheidde men spectra met een letter en nadere beschouwing maakte daar de huidige reeks van.

Type	$T_{\rm eff}$	$(B-V)$	Sterkste lijnen
O5	40000	-0.35	HeII
B0	25000	-0.3	HeI
A0	11000	0.0	H
F0	7600	0.3	FeII
G0	6000	0.6	CaII
K0	5100	1.0	FeI
M0	3600	1.4	CaI, TiO
M5	3000	2.0	TiO

Het is dus uiteindelijk een reeks van afnemende effectieve temperatuur geworden.

De zon heeft spectraaltype G2.



De precieze classificatie is gedefinieerd aan de hand van verhoudingen van sterkte van diverse absorptielijnen. De volgorde van de letters volgt het ezelsbruggetje: *"Oh, Be A Fine Girl/Guy, Kiss Me"*.

Hertzsprung–Russell Diagram

Het meest fundamentele diagram in de sterrenkunde is het HR-diagram, genoemd naar de twee astronomen (Hertzsprung was Deen, maar vele jaren direkteur van de Leidse Sterrewacht; Russell Amerikaan), die het voor het eerst maakten in 1911 en 1913.

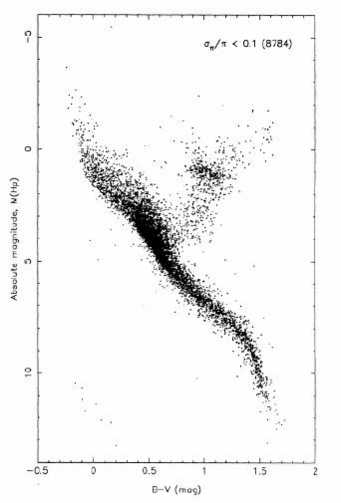
Het is een diagram van absolute magnitude tegen spectraaltype of kleur-index.

In feite is het dus een diagram van intrinsieke helderheid (lichtkracht, productie van energie) tegen de (effectieve) temperatuur van het oppervlak.

Het volgende diagram heeft alle 8784 sterren, waarvan de afstand tot 10% nauwkeurig of beter is bepaald met de Europese satelliet HIPPARCOS.

De lijn van links-boven (helder en heet) naar rechts-onder (zwak en koel) heet de *hoofdreeks*.

Omdat men vroeger dacht, dat dit een evolutielijn was, spreekt men nog steeds van "vroege" (ruwweg O, B en A), "intermediaire" (F en G) en "late" types (K en M).



Helderheidsklassen

De sterren rechtsboven (helder, maar koel) heten *Rode Reuzen*.

Waarom kan worden ingezien met de formule

$$L = 4\pi\sigma R^2 T^4$$

Immers de helderheid is hoog t.o.v. sterren van dezelfde temperatuur (of spectraalklasse of kleurindex) op de Hoofdreeks. Dan moet dus R groot zijn.

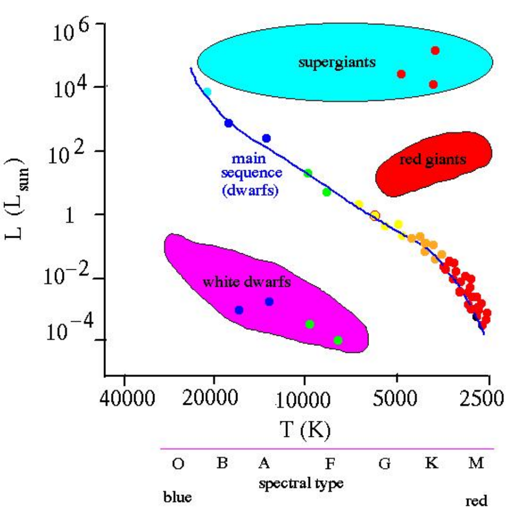
Sterren links-onder heten *Witte Dwergen*. Dit volgt natuurlijk uit dezelfde formule.

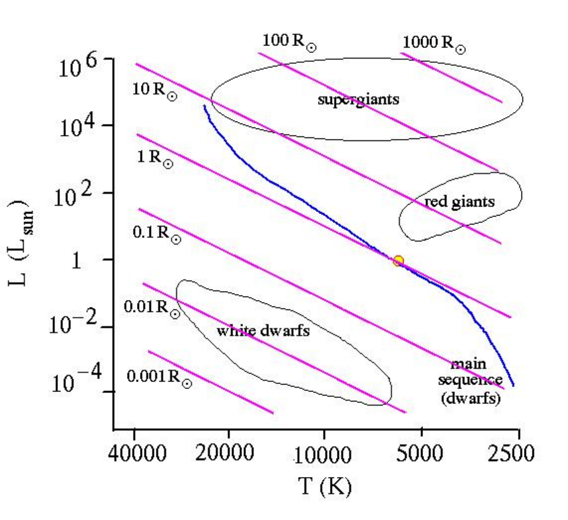
Om te onderscheiden deelt men sterren dan ook nog in naar *helderheidsklasse*.

Een hoofdreeks-ster is klasse V, rode reuzen zijn klasse III en de helderste sterren klasse I (superreus).

De zon is dus G2V.

Een ster van spectraaltype A0V heeft per definitie alle kleurindices gelijk aan 0.


supergiants
red giants
main sequence (dwarfs)
white dwarfs
L (L_sun)
10^6
10^4
10^2
1
10^-2
10^-4
40000
20000
10000
5000
2500
T (K)
O B A F G K M
spectral type
blue
red


100 R⊙
1000 R⊙
10 R⊙
1 R⊙
0.1 R⊙
0.01 R⊙
0.001 R⊙
supergiants
red giants
white dwarfs
main sequence (dwarfs)
10^6
10^4
10^2
1
10^{-2}
10^{-4}
L (L_{sun})
40000
20000
10000
5000
2500
T (K)

De helderheidsklasse kan ook uit de spectraallijnen worden afgeleid.

Voor een ster is de versnelling van de zwaartekracht aan het oppervlak

$$g = \frac{GM}{R^2}$$

Voor een reus is R groot en dus is g relatief klein.

De ster is daar in evenwicht ten gevolge van de gasdruk en bij een lage g zijn relatief kleine onderlinge bewegingen van de atomen voldoende.

Dan zijn de spectraallijnen relatief smal.

Twee-kleuren diagram

Voor sterren, waarvan de afstand niet bekend is kunnen we ook twee indices tegen elkaar uitzetten, b.v. $(U - B)$ tegen $(B - V)$.

Dit heet een *twee-kleuren diagram*.

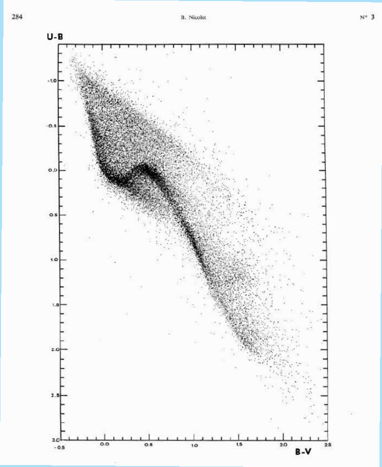
Let op de richting van de assen; die zijn gekozen zodat blauw linksboven komt en rood rechtsonder.

Dus spectraaltypes lopen van O linksboven naar M rechtsonder.

De meeste sterren liggen langs een kromme lijn.

De sterren, die daar niet op liggen, zijn roder geworden door verstrooiing van licht aan stof tussen de sterren (zie later).

De knik gebeurt bij ongeveer spectraaltype A.



Voor zuivere zwarte lichamen loopt de verwachte relatie in dezelfde richting. Voor O-sterren en late typen is het verschil klein, maar deze lijn vertoont niet de knik.

De reden is de sterke waterstof-lijnen (Balmer reeks), die piekt bij de A-sterren.

Daarvan zijn er meer naarmate we naar het blauw gaan tot ionisatie bij 3647Å.

Met name $(U - B)$ wordt daar sterk "roder" door gemaakt.

Massa van sterren

In dubbelsterren kan men in principe de massa van sterren meten met de derde wet van Kepler uit het twee-lichamen probleem:

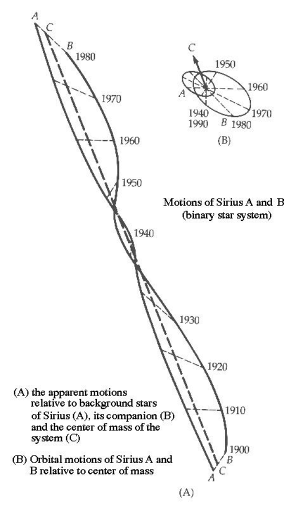
$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{1}{M_1 + M_2}$$

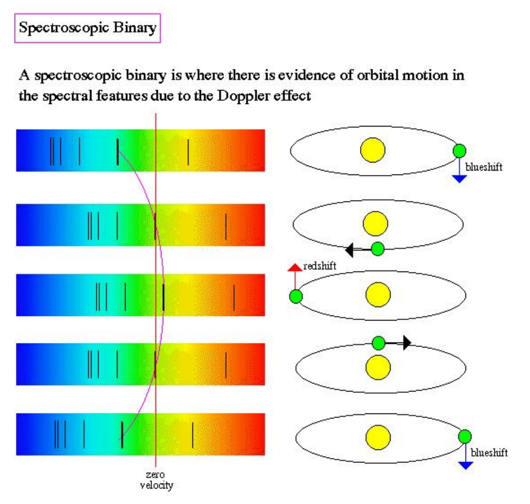
Indien T de periode (in jaren), a de halve lange as (in A.E.) en M de twee massa's (in zonsmassa's).

Dit kan zowel met behulp van de baan zelf aan de hemel als met metingen van de snelheid (in de gezichtslijn).

Over het algemeen krijgt men alleen informatie over de som van de massa's.

Maar als beide componenten gezien worden en de beweging van het zwaartepunt bepaald kan worden kunnen de beide massa's berekend worden.

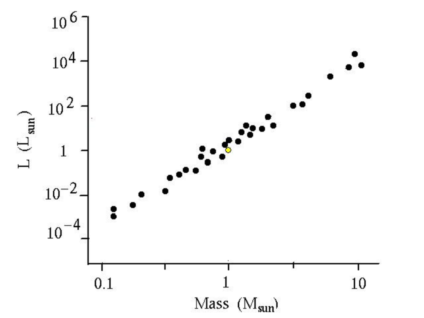


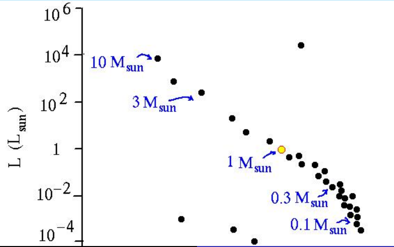

Spectroscopic Binary
A spectroscopic binary is where there is evidence of orbital motion in the spectral features due to the Doppler effect
blueshift
redshift
blueshift
zero velocity

Voor hoofdreeks-sterren vindt men dan een bijna lineaire relatie van massa met de lichtkracht.

Dus de Hoofreeks is een ordening naar massa, met de O-sterren de zwaarste (enkele tientallen $M_\odot$) en de M-sterren de lichtste ($\sim 0.1 M_\odot$).

Er is dus naast de relatie tussen lichtkracht en temperatuur (de hoofdreeks) ook een massa–lichtkracht relatie.


10 6
10 4
10 2
1
10 −2
10 −4
L (L sun)
0.1
1
10
Mass (M sun)


10 6
10 4
10 2
1
10 −2
10 −4
L (L sun)
10 M sun
3 M sun
1 M sun
0.3 M sun
0.1 M sun