Werkcollege III
Het Heelal

Opgave 1: De Hubble Expansie

Sinds 1929 weten we dat we ons in een expanderend Heelal bevinden. Het was Edwin Hubble die in 1929 de recessie snelheid van sterrenstelsels in ons locale Heelal combineerde met hun afstand, en merkte dat er een lineair verband bestond tussen de afstand r en hun snelheid v t.o.v. de Melkweg,

$$v \;=\; H\,r \tag{1}$$

Dit is een van de belangrijkste wetenschappelijke ontdekkingen van de 20^e eeuw, en deze relatie duiden we nu aan als **Hubble wet**.

We zullen eerst nagaan wat dit fysisch betekent. Stel je voor dat je in een bepaald volume N sterrenstelsels bevinden, en dat sterrenstelsel i zich bevindt op een locatie $\vec{x}_i$. Stel je nu voor dat het gehele volume met een **uniforme** hoeveelheid $R(t)$ uitzet, zodat op een tijd t de coördinaten van de sterrenstelsels gegeven worden door

$$\vec{r}_i(t) \;=\; a(t)\,\vec{x}_i\,, \tag{2}$$

waarbij per definitie $a(t_0) = 1$ op de huidige kosmische tijd. De factor $a(t)$ duiden we aan met de naam **Kosmische Expansiefactor**.

Merk op dat de *comoving* positie $\vec{x}_i$ van ieder sterrenstelsel niet verandert ! Ze zitten als het ware vastgenageld aan een achtergrond die zelf expandeert, en de waargenomen beweging is daarom niets anders dan een manifestatie van deze expansie.

Stel je voor dat je op sterrenstelsel 1 woont, en dat je gedurende lange tijd de sterrenstelsels om je heen kunt volgen. Je ziet dan de volgende relatieve verandering van de positie van de andere sterrenstelsels tov. jou:

$$\vec{r}_i(t) - \vec{r}_1(t) \;=\; a(t)\;(\vec{x}_i - \vec{x}_1) \tag{3}$$

a) Laat zien dat de bovenstaande relatie impliceert dat de omliggende sterrenstelsels een snelheid $\vec{v}_i(t)$ t.o.v sterrenstelsel 1 hebben die gegeven wordt door:

$$\vec{v}_i(t) \;=\; \dot{\vec{r}}_i(t) \;=\; H(t)\;(\vec{r}_i(t) - \vec{r}_1(t)) \tag{4}$$

met

$$H(t) \;=\; \frac{\dot{a}}{a}\,. \tag{5}$$

Dit is natuurlijk niets anders dan de Hubble wet ! De factor $H(t)$ kennen we als Hubble parameter. Merk op dat het geen constante is: als je de naam “Hubble constante” tegenkomt duidt dit op de waarde op dit moment:

$$H_0 \;\equiv\; H(t_0) \tag{6}$$

b) Betekent dit dan dat we toch het centrum van de expansie van het Heelal zijn ? Nee ! We weten al sinds Copernicus dat dat niet waar kan zijn. Laten we ons dus eens verplaatsen naar een ander sterrenstelsel, bv. nr. $i = 10$, waar een alien civilization er ook in is geslaagd een voldoende geavanceerde technologie te ontwikkelen om het Heelal te bestuderen. Laat zien dat ook voor hen de Hubble wet geldt, gezien vanaf hun sterrenstelsel $i = 10$!

c) Beargumenteer dat de Hubble wet impliceert dat het Heelal een eindige leeftijd heeft ! Bedenk daarbij dat sterrenstelsels van ons vandaan lijken te bewegen !

d) Als je aanneemt dat de expansie van het heelal altijd met dezelfde snelheid gaat, dwz. $v_i = \dot{a}\vec{x}_i = cst.$, laat dan zien dat de leeftijd van het Heelal gelijk is aan

$$t_0 = \frac{1}{H_0} \tag{7}$$

Deze tijd duiden we aan met de naam **Hubbletijd** !

e) De waarde van de Hubble parameter wordt meestal uitgedrukt in eenheden van [km/s/Mpc], dwz. $H(t)$ geeft de snelheid in [km/s] aan die een sterrenstelsel op een afstand van 1 Mpc heeft. Bereken de Hubble tijd (in eenheden van een miljard jaar, een Gyr) voor een waarde van de Hubble constante $H_0 = 71$ km/s/Mpc (dit is de huidige geeaccepteerde waarde).

f) In werkelijkheid verandert de Hubble parameter. Laten we even aannemen dat het Heelal alleen uit materie bestaat (sinds 1998 weten we dat dat niet zo is, en dat er een vreemde *donkere energie* is die de kosmische expansie domineert). De gravitationele aantrekking van massa zorgt voor een afremming van de kosmische expansie. Indien er genoeg massa zou zijn geweest om de expansie uiteindelijk tot stilstand te brengen, zou de leeftijd van het Heelal korter zijn dan de Hubble tijd,

$$t_{univ} = \frac{2}{3}\frac{1}{H_0} \tag{8}$$

Bereken de leeftijd van het Heelal in zo'n *Einstein-de Sitter* heelal. De oudste sterren die we kennen, die in bolclusters, zijn rond de 12-14 Gyr oud. Wat is dan dus het probleem ?

g) Hoe komt het dat je niets merkt van de Hubble expansie op Aarde, in het Zonnestelsel of zelfs in het Melkwegstelsel ? Daartoe moet je de ontsnappingssnelheid van deze objecten, welke een maat is voor de bindingsenergie van een object, vergelijken met de locale Hubble snelheid. Voor een object van massa M en straal R dus:

$$v_H = HR \quad \leftrightarrow \quad v_{esc} = \sqrt{\frac{2GM}{R}} \tag{9}$$

h) Bereken de Hubble expansiesnelheid aan het oppervlak van de Aarde, en vergelijk deze met de ontsnappingssnelheid. Voor de Aarde geldt: $M_\oplus = 5.97 \times 10^{24}$kg, $R_\oplus = 6371$km[1]. Doe hetzelfde voor de rand van ons Zonnestelsel, waarbij we aannemen dat de totale massa van het Zonnestelsel vrijwel volledig voor rekening komt van de Zon: $M_\odot = 1.989 \times 10^{30}$ kg. Vergelijk daarbij de Hubble expansie op de afstand van Pluto ($R \approx 39.48$ AU $\approx 5.91 \times 10^9$ km).

i) Vergelijk vervolgens de Hubble snelheid en ontsnappingssnelheid op de rand van de (zichtbare) sterrenschijf van onze Melkweg: $R_{gal} \approx 15$ kpc, $M_{gal} \approx 2 \times 10^{11}$ $M_\odot$[2]. Maak nu nog één sprong, en vergelijk de Hubble expansie snelheid met de ontsnappingssnelheid op de schaal van een Supercluster: $M_{SC} \approx 10^{15}$ $M_\odot$ en $R_{SC} \approx 15$ Mpc. Wat concludeer je hieruit ?

[1] G=6.67428×10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2}
[2] 1 kpc=30.857×10^{18} m

Opgave 2: Newtoniaanse en Relativistische Kosmologie

De Friedman vergelijkingen zijn de fundamentele vergelijkingen die de dynamische evolutie van ons Heelal beschrijven. Zij vormen het fundament onder onze hedendaagse kosmologie. Het zijn in feite de 2 onafhankelijke Einstein veldvergelijkingen voor een homogeen en isotroop medium met dichtheid ρ en druk p.

De vergelijkingen beschrijven de evolutie van de expansiefactor $a(t)$, die beschrijft hoe tengevolge van de kosmische expansie de afstand tussen voorwerpen toeneemt,

$$\vec{r}(t) \,=\, a(t)\,\vec{x}\,. \tag{10}$$

De expansiefactor is zo genormaliseerd dat heden ten dage $a(t_0) = 1$. Naarmate men terug gaat in de geschiedenis van het Heelal neemt $a(t)$ af tot $a = 0$ op het moment van de Big Bang. De Friedman vergelijkingen behelzen de gravitatie versnelling/vertraging $\ddot{a}$ van de kosmische expansie en de energievergelijking in termen van $\dot{a}^2$,

$$\boxed{\begin{aligned} \ddot{a} \;&=\; -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho + \frac{3p}{c^2}\right) a \;+\; \frac{\Lambda}{3}\,a \\ \dot{a}^2 \;&=\; \frac{8\pi G}{3}\,\rho a^2 \;-\; \frac{kc^2}{R_0^2} \;+\; \frac{\Lambda}{3}\,a^2 \end{aligned}}$$

De Friedmanvergelijkingen zijn puur relativistisch, en bevatten drie termen die in eerste instantie vreemd aandoen: de druk p is blijkbaar een bronterm voor gravitatie, er is de geheimzinnige kosmologische constante Λ - die naar we sinds 1998 weten de expansie van het Heelal sinds de laatste 7 miljard jaar domineert - en de term (kc^2/R_0^2) die de kromming van het Heelal beschrijft.

Wat die kromming van het Heelal betreft: $k = 0$ betekent dat we in een vlak Heelal leven waarin je oude Euclidische meetkunde nog volledig geldig is. Als $k = +1$ leven we in een positief gekromd heelal – te vergelijkingen met de geometrie van een boloppervlak – terwijl $k = -1$ correspondeert met een negatief gekromd Heelal, een geometrie die correspondeert met dat van een hyperbolisch oppervlak. De hoeveelheid energie/massa in het Heelal (dus de dichtheid ρ) bepaalt dus wat de geometrie van ons Heelal is.

Hoewel we dus in feite zouden moeten uitgaan van de Algemene Relativiteitstheorie voor een gepaste beschrijving van de zwaartekracht, kunnen we echter ook terugvallen op Newtoniaanse zwaartekracht om een idee te krijgen van de betekenis van de bovenstaande vergelijking. Het waren Milne en McCrea die zich dit realiseerden, kort nadat Hubble de expansie van het Heelal had ontdekt. We gaan dit in iets meer detail bekijken.

a) Schrijf de niet-relativistische veldvergelijking voor de gravitatiekracht op.

b) Stel je voor dat je een deeltje bent dat zich bevindt buiten een sferische symmetrische massa concentratie met een straal R en een dichtheidsprofiel $\rho(r)$. Welke twee essentiële vereenvoudigingen kun je hierbij aanwenden ?

c) Schrijf de bewegingsvergelijking op. Leid daarnaast ook de corresponderende energievergelijking op, dwz. de vergelijking van energiebehoud (neem daarbij aan dat het deeltje een totale energiedichtheid E heeft, dwz. energie per massa-eenheid).

d) Nu gaan we nog een stap verder, en nemen aan dat je je bevindt binnen de sferisch symmetrische massa concentratie. Schrijf nu de bewegingsvergelijking op.

Vervolgens gaan we een nog eenvoudiger situatie bekijken: we bevinden ons in een perfect homogeen en isotroop medium, dwz. de dichtheid $\rho(\vec{r})$ is op ieder tijdstip overal en iedere richting hetzelfde, $\rho(\vec{r},t) = \rho_u(t)$.

e) Schrijf de bewegingsverglijking en energievergelijking voor deze situatie op.

f) Bespreek de verschillen van de vergelijkingen die je net hebt afgeleid met de Friedman vergelijkingen.

g) Op basis van de energie E zijn er kwalitatief drie verschillende situaties. Welke zijn dit ?

Nu we enig inzicht hebben verworven in de betekenis van de Friedman vergelijkingen, gaan we deze eens in meer detail bekijken. Hierbij kijken we alleen naar de situatie van een puur materie-gedomineerd heelal, en nemen we aan dat de kosmologische constante $\Lambda = 0$ (iets wat voor 1998 in het algemeen werd gedaan, maar nu niet meer realistisch blijkt te zijn). We krijgen dan dus de volgende Friedmanvergelijkingen,

$$\begin{aligned} \ddot{a} &= -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho + \frac{3p}{c^2}\right) a \\ \dot{a}^2 &= \frac{8\pi G}{3}\rho a^2 - \frac{kc^2}{R_0^2} \end{aligned} \tag{11}$$

Merk op dat de expansiesnelheid $\dot{a}$ meestal gegeven wordt in termen van de Hubble parameter $H(t)$,

$$H(t) = \frac{\dot{a}}{a} \tag{12}$$

h) Wat is de dichtheid ρ van het Heelal die er voor zorgt dat we in een vlak Heelal leven, dwz. een Heelal dat een kromming $k = 0$ heeft ? Druk deze uit in termen van de Hubble parameter $H(t)$. Dit is een zeer belangrijke waarde, de kritische dichtheid ρ_{crit} van het Heelal (die in de orde is van $\rho_{crit} \approx 2 \times 10^{-29}$g cm^{-3}).

i) In de kosmologie drukken wij de energiedichtheid van het Heelal uit in termen van de kritische dichtheid ρ_{crit},

$$\Omega \equiv \frac{\rho}{\rho_{crit}} \tag{13}$$

Geef de waarde van Ω in termen van de Hubble parameter $H(t)$.

j) Gegeven de dichtheid aan atomen in het Heelal in de orde is van $\rho_0 \approx 0.09 \times 10^{-29}$g cm^{-3}, en $H_0 = 71$km s^{-1}Mpc^{-1}, wat is dan de waarde van Ω ? Wat betekent die voor de toekomst van het Heelal ?

We gaan nu na of we een oplossing $a(t)$ voor de expansie van het Heelal kunnen vinden. We beperken ons daarbij tot twee situaties mbt. een materie-gedomineerd heelal, waarbij dus de materie-dichtheid zich in de tijd ontwikkelt volgens

$$\rho(t) = \frac{\rho_0}{a^3} \tag{14}$$

waarbij ρ_0 de huidige materie-dichtheid is.

k) Neem aan dat we in een kritisch Heelal leven, dwz. $\rho_0 = \rho_{crit}$ en $\Omega = 1$. Los de Friedman vergelijking op en laat zien dat zo'n Heelal expandeert volgens

$$a(t) \propto \left(\frac{t}{t_0}\right)^{2/3} \tag{15}$$

Dit heet het zgn. Einstein-de Sitter heelal (de Sitter was een Nederlands sterrenkundige, en directeur van Sterrewacht Leiden).

l) Neem vervolgens aan dat je in een leeg heelal leeft, dwz. $\rho = 0$. Hoe expandeert dit Heelal, dwz. wat is $a(t)$? (dit is een asymptotische oplossing voor een Heelal met $\Omega < 1$).

Opgave 3: De Microgolfachtergrondstraling

Het belangrijkste bewijs voor de Big Bang is de ontdekking van de microgolfachtergrondstraling door Penzias & Wilson in 1965. We gaan hier in iets meer in op dit kosmische stralingsveld.

Laten we ons voor de eenvoud beperken tot een heelal dat is gevuld met materie en straling, zonder kosmologische constante. Hiervoor zijn de Friedman vergelijkingen:

$$\begin{aligned} \ddot{a} &= -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho + \frac{3p}{c^2}\right) a \\ \dot{a}^2 &= \frac{8\pi G}{3}\rho a^2 - \frac{kc^2}{R_0^2} \end{aligned} \tag{16}$$

a) Laat zien dat deze twee Friedman vergelijkingen een derde vergelijking impliceren,

$$\dot{\rho} + 3\,(\rho + \frac{p}{c^2})\,\frac{\dot{a}}{a} = 0 \tag{17}$$

Deze vergelijking is in feite een derde relevante Einsteinvergelijking, die in deze situatie van een homogeen en isotroop heelal echter niet onafhankelijk is van de rest.

b) Beargumenteer dat deze vergelijking impliceert dat de expansie van het Heelal adiabatisch is. Dwz., laat zien dat het impliceert dat de interne energieinhoud $U = \rho c^2 V$ in een volume $V \propto a^3$, dwz. een volume dat expandeert tgv. de uitdijing van het Heelal, voldoet aan het verband

$$dU = -p\,dV \tag{18}$$

c) De repercussie van het bovenstaande is groot: de expansie van het heelal is adiabatisch, dus de uitdijing van het Heelal gaat ten koste van de energiedichtheid van het Heelal !!!! We weten dat de temperatuur T voor een adiabatisch medium geldt dat $TV^{\gamma-1} = cst$. Voor het fotongas (straling) geldt een adiabatische index $\gamma \propto 4/3$. Leidt hieruit af hoe de temperatuur T van de kosmische achtergrondstraling verandert ten gevolge van de expansie van het Heelal.

d) De kosmische achtergrondstraling blijkt een perfect thermische straling te zijn, met een perfect Plank spectrum: de energieverdeling van fotonen met een frequentie ν gegeven door:

$$u_\nu(T) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3}\,\frac{1}{\exp h\nu/kT - 1}, \tag{19}$$

waarbij $u_\nu(T)$ de energiedichtheid is van de CMB fotonen met frequentie ν [3]. Als je nu weet dat tengevolge van de Hubble expansie van het Heelal de golflengte λ van licht naar het rood verschuift, dwz.

$$\lambda(t) \,=\, a(t)\lambda_0 \tag{20}$$

laat dan zien dat de kosmische fotonen altijd een Planck spectrum zullen behouden. Met andere woorden, we weten dat door aan te tonen dat het nu een perfect Planck spectrum heeft met temperatuur $T_0 = 2.725K$, het altijd pure thermische straling is geweest. Ook veel vroeger in het Heelal. Dit op zichzelf kan alleen worden begrepen als het Heelal ooit door een zeer hete en zeer dichte fase is gegaan: het ultieme bewijs voor de Big Bang. Hiervoor is intussen maar liefst tweemaal de Nobelprijs natuurkunde toegekend, aan Penzias en Wilson in 1978 voor de ontdekking van de CMB en in 2006 aan John Mather voor het aantonen van het absoluut perfecte zwarte lichaams gedrag van de CMB !!!!

e) Laat zien dat de dichtheid aan fotonen, dus de totale hoeveelheid fotonen van alle frequenties in een bepaald volume, gegeven wordt door

$$n_\gamma \,=\, 60.4 \left(\frac{kT}{hc}\right)^3 \tag{21}$$

Maak hierbij gebruik van het feit dat de integraal

$$\int_0^\infty \frac{x^2\,dx}{e^x-1} \,\approx\, 2.4045 \tag{22}$$

f) De huidige temperatuur van de kosmische microgolfachtergrondstraling is $T = 2.725$ K. Bereken hoeveel CMB fotonen er per cm^3 zijn.

g) Als je nu weet dat de dichtheid aan atomaire (baryonische) materie in het heelal is bepaald door de dichtheidsparameter Ω_b, laat dan zien dat het aantal baryonen (protonen en neutronen) in het Heelal gegeven wordt door:

$$n_b \,\approx\, 1.12\times 10^{-5}\Omega_b h^2\,\mathrm{cm}^{-3}\,, \tag{23}$$

waarbij de Hubble parameter gegeven wordt door $H = 100h$km s^{-1}Mpc^{-1}. Je mag hierbij aannemen dat de massa van het neutron ongeveer gelijk is aan dat van het proton, $m_n \approx m_p \approx 1.672\times 10^{-24}$ g.

h) Leidt uit bovenstaande af dat de huidige verhouding η_0 tussen het aantal fotonen en baryonen gegeven wordt door:

$$\eta_0 \,=\, \frac{n_\gamma}{n_b} \,\approx\, 3.65\times 10^7\,\frac{1}{\Omega_b h^2} \tag{24}$$

[3] De Boltzmann constant $k = 1.3807\times 10^{-16}$erg K^{-1}, de Planck constante $h = 6.6261\times 10^{-27}$erg s en de lichtsnelheid in vacuüm $c = 2.99792458\times 10^10\,\mathrm{cm\ s}^{-1}$.

Indien we de huidige beste waarden gebruiken van $\Omega_b = 0.044$ en $H_0 = 71 \mathrm{km\,s}^{-1}\mathrm{Mpc}^{-1}$, wat is dan de waarde van de foton-baryon verhouding ?

i) Laat zien dat de foton-baryon verhouding constant is, dwz. niet verandert tijdens de expansie van het Heelal. Maw. laat zien dat $\eta(z) = \eta_0$. Dit is een uiterst belangrijk resultaat. De foton-baryon verhouding is een van de meest fundamentele parameters van het Heelal, en bepaalt zijn thermische evolutie. In feite is het gelijk aan de entropie van ons universum, en deze blijkt dus ongekend hoog te zijn. We kennen geen enkel ander fysisch systeem met zo'n hoge entropie.