Werkcollege III
Het Heelal

Opgave 1: De Hubble Expansie

Sinds 1929 weten we dat we ons in een expanderend Heelal bevinden. Het was Edwin Hubble die in 1929 de recessie snelheid van sterrenstelsels in ons locale Heelal combineerde met hun afstand, en merkte dat er een lineair verband bestond tussen de afstand r en hun snelheid v t.o.v. de Melkweg,

$$v = H\,r \tag{1}$$

Dit is een van de belangrijkste wetenschappelijke ontdekkingen van de 20^e eeuw, en deze relatie duiden we nu aan als **Hubble wet**.

We zullen eerst nagaan wat dit fysisch betekent. Stel je voor dat zich in een bepaald volume N sterrenstelsels bevinden, en dat sterrenstelsel i zich bevindt op een locatie $\vec{x}_i$. Stel je nu voor dat het gehele volume met een **uniforme** hoeveelheid $R(t)$ uitzet, zodat op een tijd t de coördinaten van de sterrenstelsels gegeven worden door

$$\vec{r}_i(t) = a(t)\,\vec{x}_i\,, \tag{2}$$

waarbij per definitie $a(t_0) = 1$ op de huidige kosmische tijd. De factor $a(t)$ duiden we aan met de naam **Kosmische Expansiefactor**.

Stel je voor dat je op sterrenstelsel 1 woont, en dat je gedurende lange tijd de sterrenstelsels om je heen kunt volgen. Je ziet dan de volgende relatieve verandering van de positie van de andere sterrenstelsels tov. jou:

$$\vec{r}_i(t) - \vec{r}_1(t) = a(t)\;(\vec{x}_i - \vec{x}_1) \tag{3}$$

a) We gaan uit van de relatieve locatie $\vec{r}_i(t) - \vec{r}_1(t)$ van een sterrenstelsel tov. stelsel 1

$$\vec{r}_i(t) - \vec{r}_1(t) = a(t)\;(\vec{x}_i - \vec{x}_1) \tag{4}$$

De snelheid verkrijgen we door de tijdsafgeleide te nemen,

$$\begin{aligned}
\vec{v}_i(t) &= \frac{d}{dt}\,(\vec{r}_i(t) - \vec{r}_1(t)) \\
&= \frac{d}{dt}\,a(t)\,(\vec{x}_i - \vec{x}_1) \\
&= \frac{da}{dt}\;(\vec{x}_i - \vec{x}_1) \\
&= \frac{\dot{a}}{a}\,a(t)\,(\vec{x}_i - \vec{x}_1) \\
&= \frac{\dot{a}}{a}\;(\vec{r}_i(t) - \vec{r}_1(t)) \\
&= H(t)\;(\vec{r}_i(t) - \vec{r}_1(t)) \qquad (5)
\end{aligned}$$

met

$$H(t) = \frac{\dot{a}}{a} \tag{6}$$

b) Nee, natuurlijk is sterrenstelsel 1 niet het centrum ! De waargenomen snelheid is een gevolg van de expansie van de gehele ruimte, en vanuit ieder punt en sterrenstelsel gezien zul je hetzelfde patroon waarnemen: een toenemende recessiesnelheid naarmate de afstand toeneemt.

Dus, als je jezelf bevindt in sterrenstelsel 10, vind je:

$$\begin{aligned}
\vec{v}_i(t) &= \frac{d}{dt}\left(\vec{r}_i(t) - \vec{r}_{10}(t)\right) \\
&= \frac{d}{dt}\, a(t)\left(\vec{x}_i - \vec{x}_{10}\right) \\
&= \frac{da}{dt}\left(\vec{x}_i - \vec{x}_{10}\right) \\
&= \frac{\dot{a}}{a}\, a(t)\left(\vec{x}_i - \vec{x}_{10}\right) \\
&= \frac{\dot{a}}{a}\left(\vec{r}_i(t) - \vec{r}_{10}(t)\right) \\
&= H(t)\,\left(\vec{r}_i(t) - \vec{r}_{10}(t)\right) \qquad (7)
\end{aligned}$$

Met andere woorden, je vindt precies dezelfde Hubble expansie als die quasi-intelligente lui in de Melkweg, sterrenstelsel 1.

c) Als je alle sterrenstelsels systematisch van je vandaan ziet bewegen, dan kun je ook terug extrapoleren in de tijd: er zal een moment zijn geweest waarin de afstand $|\vec{r}_i(t) - \vec{r}_1(t)| = 0$, dwz. alle sterrenstelsels staan op dezelfde positie ! Dit eindige moment in het verleden moet gezien worden als het begin van het heelal: de Big Bang.

d) Als je aanneemt dat de expansie van het heelal altijd met dezelfde snelheid gaat, dan kunnen we nagaan op welk tijdstip t_H 2 sterrenstelsels i en j dezelfde positie hadden.

In de tijd t_H zijn de 2 stelsels een afstand $|\vec{r}_i - \vec{r}_j|$ van elkaar af bewogen, tengevolge van een uniforme expansiesnelheid,

$$v_{ij} t_H = |\vec{r}_i - \vec{r}_j| \tag{8}$$

Volgens de Hubble expansie geldt ook:

$$v_{ij} = H(t)\,|\vec{r}_i - \vec{r}_j| \tag{9}$$

zodat we zien dat voor de tijd t_H geldt dat

$$t_H = \frac{1}{H(t)} \tag{10}$$

Heden ten dage,

$$t_0 = \frac{1}{H_0} \tag{11}$$

Deze tijd duiden we aan met de naam **Hubbletijd** !

e) H_0=71 km/s/Mpc; 1 Mpc=30.857×10^{18} km:

$$\begin{aligned} t_0 = \frac{1}{H_0} &= 4.35 \times 10^{17}\,\text{sec} \\ &= 13.8 \times 10^9\,\text{yr} \end{aligned} \tag{12}$$

f)

$$\begin{aligned} t_{univ} &= \frac{2}{3}\frac{1}{H_0} \\ &= 9.2 \times 10^9\,\text{yr} \end{aligned} \tag{13}$$

Dit is veel minder dan de leeftijd van de oudste sterren. Dat is onmogelijk: sterren zijn ontstaan na het Heelal ! Dit was een van de crises die in de begin jaren negentig de kosmologie beheersten, en pas werd opgelost met de ontdekking van donkere energie in 1998.

g) Zolang de Hubble expansiesnelheid veel kleiner is dan de ontsnappingssnelheid van het systeem, zal het geen enkel effect hebben en zul je het dus ook niet merken. Dit is ook de reden dat wij het effect kunnen meten: de gebonden systemen zijn een maat voor absolute afmeting (dwz. een meetlat blijft dezelfde lengte houden en dijt niet uit met de Hubble expansie).

Natuurlijk zijn wij zelf het beste voorbeeld: de van der Waals moleculaire krachten zijn veel groter dan de Hubble expansie over vergelijkbare afmetingen.

h) Laten we eerst de Hubble parameter H_0 uitdrukken in eenheden $[s^{-1}]$:

$$H_0 = 71\,\text{km/s/Mpc} \quad \leftrightarrow \quad H_0 = 2.30 \times 10^{-18}\,\text{s}^{-1} \tag{14}$$

Voor de Aarde geldt aan het oppervlak, met $M_\oplus = 5.97 \times 10^{24}$kg, $R_\oplus = 6.371$km[1],

$$v_{esc} = 11.18\,\text{km/s} \quad \leftrightarrow \quad v_H = H_0\,R_\oplus = 1.47 \times 10^{-14}\,\text{km/s}\,. \tag{15}$$

Duidelijk stelt de Hubble expansie tussen oppervlak en centrum van de Aarde in het geheel niets voor ! Vandaar dat we er nooit iets van gemerkt zouden hebben indien we geen telescopen hadden gehad !

[1] G=6.67428×10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2}

Als we aan de rand van het Zonnestelsel staan, vinden we met $M \approx M_{\odot} = 1.989 \times 10^{30}$ kg en $R_{solsys} \approx 39.48$ AU $\approx 5.91 \times 10^9$ km,

$$v_{esc} \;=\; 6.7\,\text{km/s} \quad \leftrightarrow \quad v_H \;=\; H_0\,R_{solsys} \;=\; 1.36 \times 10^{-8}\,\text{km/s}\,. \tag{16}$$

Dit leidt alweer tot dezelfde conclusie: de Hubble expansie is onmerkbaar.

i) Het wordt interessanter wanneer we de situatie gaan vergelijken op Galactische en Supergalactische schaal. Mbt. de Melkweg, vinden we dat aan de rand van de zichtbare stellaire schijf, met $R_{Gal} \approx 15$ kpc en $M_{Gal} \approx 2.0 \times 10^{11}$ $M_{\odot}$ dat

$$v_{esc} \;=\; 339\,\text{km/s} \quad \leftrightarrow \quad v_H \;=\; H_0\,R_{Gal} \;=\; 1.06\,\text{km/s}\,. \tag{17}$$

Maw., hoewel de locale Hubble snelheid (van buitenrand Melkweg tov. centrum Melkweg) in het niet valt bij de ontsnappingssnelheid, begint de geimpliceerde Hubble snelheid wel een aanzienlijke waarde te bereiken. Laten we nu eens kijken op extragalactische schaal, naar de Hubble snelheid aan de rand van onze Locale Supercluster, met $M_{SC} \approx 10^{15}$ $M_{\odot}$ en $R_{SC} \approx 15$ Mpc,

$$v_{esc} \;=\; 757\,\text{km/s} \quad \leftrightarrow \quad v_H \;=\; H_0\,R_{SC} \;=\; 1065\,\text{km/s}\,. \tag{18}$$

Hier komen we tot de interessante conclusie dat de Hubble expansie snelheid groter is dan ontsnappingssnelheid: in een Supercluster merken we inderdaad de kosmische expansie !

Opgave 2: Newtoniaanse en Relativistische Kosmologie

De Friedman vergelijkingen zijn de fundamentele vergelijkingen die de dynamische evolutie van ons Heelal beschrijven. Zij vormen het fundament onder onze hedendaagse kosmologie. Het zijn in feite de 2 onafhankelijke Einstein veldvergelijkingen voor een homogeen en isotroop medium met dichtheid ρ en druk p.

De vergelijkingen beschrijven de evolutie van de expansiefactor $a(t)$, die beschrijft hoe tengevolge van de kosmische expansie de afstand tussen voorwerpen toeneemt,

$$\vec{r}(t) \,=\, a(t)\,\vec{x}\,. \tag{19}$$

De expansiefactor is zo genormaliseerd dat heden ten dage $a(t_0) = 1$. Naarmate men terug gaat in de geschiedenis van het Heelal neemt $a(t)$ af tot $a = 0$ op het moment van de Big Bang. De Friedman vergelijkingen behelzen de gravitatie versnelling/vertraging $\ddot{a}$ van de kosmische expansie en de energievergelijking in termen van $\dot{a}^2$,

$$\boxed{\begin{aligned} \ddot{a} \quad &= \quad -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho + \frac{3p}{c^2}\right) a \;+\; \frac{\Lambda}{3}\,a \\ \dot{a}^2 \quad &= \quad \frac{8\pi G}{3}\,\rho a^2 \;-\; \frac{kc^2}{R_0^2} \;+\; \frac{\Lambda}{3}\,a^2 \end{aligned}}$$

De Friedmanvergelijkingen zijn puur relativistisch, en bevatten drie termen die in eerste instantie vreemd aandoen: de druk p is blijkbaar een bronterm voor gravitatie, er is de geheimzinnige kosmologische constante Λ - die naar we sinds 1998 weten de expansie van het Heelal sinds de laatste 7 miljard jaar domineert - en de term (kc^2/R_0^2) die de kromming van het Heelal beschrijft.

Wat die kromming van het Heelal betreft: $k = 0$ betekent dat we in een vlak Heelal leven waarin je oude Euclidische meetkunde nog volledig geldig is. Als $k = +1$ leven we in een positief gekromd heelal – te vergelijken met de geometrie van een boloppervlak – terwijl $k = -1$ correspondeert met een negatief gekromd Heelal, een geometrie die correspondeert met dat van een hyperbolisch oppervlak. De hoeveelheid energie/massa in het Heelal (dus de dichtheid ρ) bepaalt dus wat de geometrie van ons Heelal is.

Hoewel we dus in feite zouden moeten uitgaan van de Algemene Relativiteitstheorie voor een gepaste beschrijving van de zwaartekracht, kunnen we echter ook terugvallen op Newtoniaanse zwaartekracht om een idee te krijgen van de betekenis van de bovenstaande vergelijking. Het waren Milne en McCrea die zich dit realiseerden, kort nadat Hubble de expansie van het Heelal had ontdekt. We gaan dit in iets meer detail bekijken.

a) Schrijf de niet-relativistische veldvergelijking voor de gravitatiekracht op.
De niet-relativistische gravitatie veldvergelijking is de Newtonvergelijking. Voor een deeltje dat op een positie **r** zit tov. het massamiddelpunt van een massa M, geldt

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{GM}{r^2}\,\vec{e}_r \tag{20}$$

waarbij $\vec{e}_r$ de eenheidsvector is met richting langs de vector $\vec{r}$[2].

b) Stel je voor dat je een deeltje bent dat zich bevindt buiten een sferische symmetrische massa concentratie met een straal R en een dichtheidsprofiel $\rho(r)$. Welke twee essentiële vereenvoudigingen kun je hierbij aanwenden ?

De twee vereenvoudigingen zijn:
1) tengevolge van de sferische symmetrie van het probleem, kun je het aantal coördinaten van 3 ($\vec{r}$) terugbrengen naar 1: de radiële component r.
2) omdat de massaverdeling binnen het object met massa M sferisch is, is de resulterende gravitationele aantrekking gelijk aan de situatie waarbij alle massa M geconcentreerd is in het centrum van de bol. Overigens geldt dit ook voor de situatie waarbij het deeltje in het binnenste van de bol ligt, maar dan is de enige massa die telt de massa $M(r)$ binnen de straal r.

c) Schrijf de bewegingsvergelijking op. Leid daarnaast ook de corresponderende energievergelijking op, dwz. de vergelijking van energiebehoud (neem daarbij aan dat het deeltje een totale energiedichtheid E heeft, dwz. energie per massa-eenheid).
We bekijken eerst de bewegingsvergelijking langs de richting van de vector $\vec{r}$,

$$\ddot{r} = -\frac{GM}{r^2} \tag{21}$$

[2] merk op dat ik bij wijze van kortschrift de eerste en tweede afgeleide naar de tijd schrijf als:

$$\dot{a} \equiv \frac{da}{dt}\,; \qquad \ddot{a} \equiv \frac{d^2a}{dt^2}$$

Om de energievergelijking af te leiden, vermenigvuldigen we beide zijden met $\dot{r}$:

$$\dot{r}\,\ddot{r} = -\frac{GM}{r^2}\,\dot{r} \tag{22}$$

Als we nu de linkerzijde vergelijken met:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d\dot{r}^2}{dt} &= \frac{1}{2}\frac{d\dot{r}^2}{d\dot{r}}\frac{d\dot{r}}{dt} \\ &= \dot{r}\,\ddot{r} \end{aligned} \tag{23}$$

waarbij we gebruik maken van de kettingregel om $d\dot{r}^2/dt$ te bepalen. Een soortgelijke evaluatie volgt aan de rechterzijde:

$$-\frac{GM}{r^2}\,\dot{r} = GM\,\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\right) \tag{24}$$

We kunnen nu vergelijking 22 blijkbaar schrijven als de vergelijking van twee tijdsafgeleiden:

$$\frac{1}{2}\frac{d\dot{r}^2}{dt} = GM\,\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\right) \tag{25}$$

zodat we weten dat op een integratieconstante na de twee zijden van de vergelijkingen aan elkaar gelijk zijn:

$$\frac{1}{2}\dot{r}^2 = \frac{GM}{r} + E\,. \tag{26}$$

Door dit enigszins te herschrijven, zien we direct wat de betekenis is van de constante E: het is de totale energie van het deeltje:

$$\frac{1}{2}\dot{r}^2 - \frac{GM}{r} = E\,. \tag{27}$$

d) Nu gaan we nog een stap verder, en nemen aan dat je je bevindt binnen de sferisch symmetrische massa concentratie. Schrijf nu de bewegingsvergelijking op.
In feite blijken de vergelijkingen dan precies hetzelfde te zijn, op één belangrijk verschil na: de effectieve gravitationeel aantrekkende massa $M(r)$ is de massa binnen straal r waarop het deeltje zich bevindt. De massa die zich buiten die straal bevindt telt effectief niet mee daar het tegen elkaar uitmiddelt. De bewegingsvergelijking wordt bijgevolg eenvoudigweg:

$$\ddot{r} = -\frac{GM(r)}{r^2} \tag{28}$$

waarbij $M(r)$ wordt gegeven door de integraal

$$M(r) \;=\; 4\pi \int_0^r \rho(x)\, x^2\, dx\,. \tag{29}$$

waarbij $\rho(r)$ het dichtheidsprofiel binnen de bol is, dwz. de verdeling van de dichtheid binnen de bol als functie van de straal. De betekenis van deze integraal kun je inzien door op te merken dat de inhoud van een zeer dunne bolschil met dikte dr gelijk is aan $4\pi r^2 dr$ (oppervlakte bol met straal r $\times$ dr), zodat de hoeveelheid massa in die massaschil gegeven wordt door $dM = 4\pi r^2 \rho(r) dr$. Vervolgens volgt $M(r)$ dan uit het integreren over alle massaschillen,

$$M(r) \;=\; \int_0^r dM(x) \;=\; 4\pi \int_0^r \rho(x)\, x^2\, dx\,. \tag{30}$$

Vervolgens gaan we een nog eenvoudiger situatie bekijken: we bevinden ons in een perfect homogeen en isotroop medium, dwz. de dichtheid $\rho(\vec{r})$ is op ieder tijdstip overal en iedere richting hetzelfde, $\rho(\vec{r},t) = \rho_u(t)$.

e) Schrijf de bewegingsverglijking en energievergelijking voor deze situatie op.
Je gaat uit van de bewegingsvergelijkingen zoals hierboven afgeleid,

$$\begin{aligned} \ddot{r} &= -\frac{GM(r)}{r^2} \\ \frac{1}{2}\,\dot{r}^2 &= \frac{GM}{r} \,+\, E\,. \end{aligned} \tag{31}$$

We gaan nu onder aanname van een uniforme dichtheid de mass $M(r)$ als functie van de straal r uitwerken, en invullen in de bovenstaande bewegingsvergelijkingen:

$$\begin{aligned} M(r) &= 4\pi \int_0^r \rho(x)\, x^2\, dx \\ &= \frac{4\pi\rho_u}{3}\, r^3, \end{aligned} \tag{32}$$

Vervolgens substitueren we dat laatste in verg. 31 voor $M(r)$, waarna we de volgende vergelijkingen overhouden:

$$\begin{aligned} \ddot{r} &= -\frac{4\pi G}{3}\,\rho_u\, r \\ \dot{r}^2 &= \frac{8\pi G}{3}\,\rho\, r^2 \,+\, 2E\,. \end{aligned} \tag{33}$$

(waarbij ik de laatste vergelijking aan beide zijden met 2 heb vermenigvuldigd). Het interessante is dus dat vgl. 33 als twee druppels water op de Friedman vgl. lijkt ! Met andere woorden, diep in Newton's gravitatiewet zat heimelijk ook de vgl. voor een uniform expanderend heelal verborgen. Met natuurlijk ZEER cruciale en ESSENTIELE verschillen.

f) Bespreek de verschillen van de vergelijkingen die je net hebt afgeleid met de Friedman vergelijkingen. Vergelijking met het Newtoniaanse equivalent, vgl. 33 laat niet alleen de treffende gelijkenis zien, maar ook een drietal fundamentele verschillen:

[1.] in de bronvergelijking voor de versnelling zien we

$$\left(\rho + \frac{3p}{c^2}\right) \qquad \text{vs.} \qquad \rho\,, \tag{34}$$

maw., terwijl volgens Newton alleen massadichtheid zwaartekracht genereert, is dit bij Einstein's algemene relativiteitstheorie de energiedichtheid (ρ omvat alle energiebijdragen, ook van straling) PLUS de druk p van het medium. Dit verschil gaat diep tot aan de fundamenten van de relativiteitstheorie: je kan in een inertiaalsysteem "energie" niet echt als een goede fysische grootheid beschouwen, je moet dit doen tezamen met "impuls", het gaat om "energie-impuls" net zo als "ruimte-tijd" de goede manier is om naar ruimte en tijd te kijken. Druk is de transport van impuls, vandaar dat het in de Einsteinvgl. terechtkomt.

[2.] Bij Newton hebben we te maken met de totale hoeveelheid energie E van een lichaam. Dit is niet terug te vinden bij Einstein's relativiteitstheorie. Wel vinden we in deze rol een andere constante, de krommingsterm

$$-\frac{kc^2}{R_0^2} \tag{35}$$

Evenals de energieterm E bepaalt hoe de evolutie van het systeem verloopt, heeft de kromming een bijna even belangrijke rol (ware het niet voor de aanwezigheid van de kosmologische constante, zou het allesbepalend zijn).

[3.] de kosmologische constante Λ is uniek relativistisch, heeft geen enkel equivalent in Newton's gravitatietheorie. De constante is een vrije term in de Einsteinvergelijking, die dus aanvankelijk er in terecht kwam op wiskundige grond. Later gebruikte Einstein de term om zijn kosmologische oplossing te stabiliseren, dwz. om te voorkomen dat het heelal zou uitdijen. Dit was ruim 10 jaar voor de ontdekking van de kosmologische uitdijing door Edwin Hubble ! Na die ontdekking, noemde Einstein Λ de grootste blunder uit zijn leven. Hij zou wellicht verbaasd zijn geweest om te weten dat in 1998 werd ontdekt dat het de invloed is die nu de evolutie van het heelal domineert en het lot van het Heelal bepaalt.

g) Op basis van de energie E zijn er kwalitatief drie verschillende situaties. Welke zijn dit ? We kunnen de volgende drie kwalitatief verschillende oplossing onderkennen (zie figuur):

[1.] $E < 0$: gesloten oplossing: er is niet genoeg kinetische energie om de potentiële energie te compenseren. Een deeltje met zo'n energietoestand is gevangen in de potentiaal, gebonden aan de aantrekkende massa. Indien het begint met een expansie zal deze geleidelijk aan tot nul worden vertraagd, en omkeren in contractie en uiteindelijke ineenstorting.

[2.] $E = 0$: kritische oplossing: kinetische energie en potentiële energie houden elkaar in evenwicht. Een initiële snelheid wordt uiteindelijk (in het oneindige) tot stilstand gebracht.

[3.] $E > 0$: open oplossing: er is meer kinetische energie dan potentiële energie. Bijgevolg kan de zwaartekracht de snelheid van een lichaam niet meer afremmen en zal deze altijd door blijven gaan. In kosmologische context betekent dit dus dat de expansie altijd door blijft gaan en nooit tot stilstand komt.

Nu we enig inzicht hebben verworven in de betekenis van de Friedman vergelijkingen, gaan we deze eens in meer detail bekijken. Hierbij kijken we alleen naar de situatie van een puur materie-gedomineerd heelal, en nemen we aan dat de kosmologische constante $\Lambda = 0$ (iets wat voor 1998 in het algemeen werd gedaan, maar nu niet meer realistisch blijkt te zijn). We krijgen dan dus de volgende Friedmanvergelijkingen,

$$\begin{aligned} \ddot{a} &= -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho + \frac{3p}{c^2}\right) a \\ \dot{a}^2 &= \frac{8\pi G}{3}\,\rho a^2 - \frac{kc^2}{R_0^2} \end{aligned} \tag{36}$$

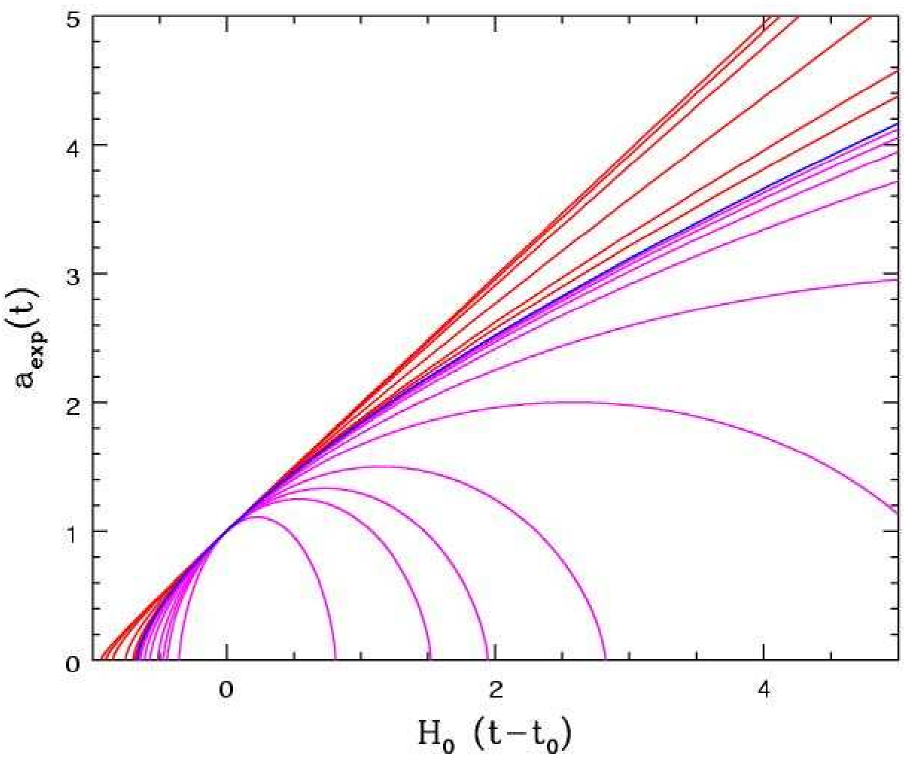

Figure 1: De drie verschillende oplossingen voor de kosmologische bewegingsvergelijkingen. Rood: $E > 0$, de energie E is hoog genoeg om voor altijd te blijven expanderen. Magenta: $E < 0$, gebonden systeem waarin de zwaartekracht het uiteindelijk wint en de uitdijing verandert in samentrekking en ineenstorting. Blauw: de kritische oplossing met $E = 0$.

Merk op dat de expansiesnelheid $\dot{a}$ meestal gegeven wordt in termen van de Hubble parameter $H(t)$,

$$H(t) = \frac{\dot{a}}{a} \tag{37}$$

h) Wat is de dichtheid ρ van het Heelal die er voor zorgt dat we in een vlak Heelal leven, dwz. een Heelal dat een kromming $k = 0$ heeft ? Druk deze uit in termen van de Hubble parameter $H(t)$. Dit is een zeer belangrijke waarde, de kritische dichtheid ρ_{crit} van het Heelal (die in de orde is van $\rho_{crit} \approx 2 \times 10^{-29}$g cm^{-3}).
Om dit op te lossen kijken we direct naar de Friedman vergelijking (eqn. 37, zonder kosmologische constante), welke zegt dat:

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho a^2 - \frac{kc^2}{R_0^2} \tag{38}$$

Omdat gegeven is dat we in een vlak heelal leven, $k = 0$, vinden we dus dat

$$\dot{a}^2 \;=\; \frac{8\pi G}{3}\,\rho a^2 \tag{39}$$

waaruit we afleiden dat de corresponderende dichtheid, de kritische dichtheid $\rho_{crit}(a)$, gegeven wordt door

$$\rho_{crit}(a) \;=\; \frac{3}{8\pi G}\,\frac{\dot{a}^2}{a^2}\,. \tag{40}$$

We weten al dat de kosmologische expansie wordt uitgedrukt in termen van de Hubble parameter,

$$H(t) \;=\; \frac{\dot{a}}{a}\,, \tag{41}$$

welke de snelheid van de uitdijing beschrijft. Dan kunnen we dus mbv. vgl. 40 voor de kritische dichtheid schrijven:

$$\rho_{crit} \;=\; \frac{3H^2}{8\pi G} \tag{42}$$

i) In de kosmologie drukken wij de energiedichtheid van het Heelal uit in termen van de kritische dichtheid ρ_{crit},

$$\Omega \;\equiv\; \frac{\rho}{\rho_{crit}} \tag{43}$$

Geef de waarde van Ω in termen van de Hubble parameter $H(t)$.
Hierbij substitueren we de uitdrukking voor de kritische dichtheid ρ_{crit} in vgl. 43,

$$\Omega \;=\; \frac{\rho}{\rho_{crit}} = \frac{8\pi G\rho}{3H^2} \tag{44}$$

j) Gegeven de dichtheid aan atomen in het Heelal in de orde is van $\rho_{b,0} \approx 0.09 \times 10^{-29}$g cm^{-3}, en $H_0 = 71$km s^{-1}Mpc^{-1}, wat is dan de waarde van Ω ? Wat betekent die voor de toekomst van het Heelal ?
We weten dat de kritische dichtheid $\rho_{crit} \approx 2 \times 10^{-29}$g cm^{-3} (zie vraag h), terwijl de dichtheid aan baryonen (atomen, protonen, neutronen, ...) gelijk is aan $\rho_{b,0} \approx 0.09 \times 10^{-29}$g cm^{-3}, dus

$$\Omega_{b,0} \;\approx\; \frac{\rho_{b,0}}{\rho_{crit}} \;\approx 0.045\,. \tag{45}$$

Dit is inderdaad de waarde die volgt uit een aantal kosmologische waarnemingen. Daar $\Omega_b < 1$ moeten we concluderen dat gewone baryonische materie, de protonen en neutronen waar wij uit bestaan, nooit voldoende zijn om het Heelal een vlakke geometrie te geven. Het is veel minder dan de kritische dichtheid. Dit betekent dat het Heelal altijd zal blijven expanderen, zijn uitdijing komt niet tot stilstand.

We gaan nu na of we een oplossing $a(t)$ voor de expansie van het Heelal kunnen vinden. We beperken ons daarbij tot twee situaties mbt. een materie-gedomineerd heelal, waarbij dus de materie-dichtheid zich in de tijd ontwikkelt volgens

$$\rho(t) = \frac{\rho_0}{a^3} \tag{46}$$

waarbij ρ_0 de huidige materie-dichtheid is.

k) Neem aan dat we in een kritisch Heelal leven, dwz. $\rho_0 = \rho_{crit}$ en $\Omega = 1$. Los de Friedman vergelijking op en laat zien dat zo'n Heelal expandeert volgens

$$a(t) \propto \left(\frac{t}{t_0}\right)^{2/3} \tag{47}$$

Dit heet het zgn. Einstein-de Sitter heelal (de Sitter was een Nederlands sterrenkundige, en directeur van Sterrewacht Leiden).
Om de oplossing te vinden gaan we terug op de Friedman vergelijking (voor een heelal zonder kosmologische constante), (vgl. 36),

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho a^2 - \frac{kc^2}{R_0^2} \tag{48}$$

We hebben het over een vlak heelal, met $k = 0$, en we weten (zie boven) dat $\rho = \rho_0/a^3$ (vgl. 46). Dan wordt de bovenstaande Friedman vergelijking gelijk aan:

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G}{3}\frac{\rho_0}{a^3}a^2 = \frac{8\pi G\rho_0}{3}\frac{1}{a} \tag{49}$$

Dus vinden we de volgende differentiaalvergelijking voor dit systeem:

$$\dot{a}^2\, a = \frac{8\pi G\rho_0}{3} \tag{50}$$

waarbij de rechterterm een constante is. Als we dan de wortel nemen van deze uitdrukking

$$\dot{a}\, a^{1/2} = \sqrt{\frac{8\pi G\rho_0}{3}} = cst. \tag{51}$$

waarbij we weten dat de uitdrukking aan de rechterzijde constant is. Om te zien hoe we de oplossing van deze differentiaalvergelijking gemakkelijk kunnen afleiden, schrijven we de afgeleide aan de linkerzijde om,

$$a^{1/2}\,\dot{a} = \frac{2}{3}\frac{d}{dt}a^{3/2}\,. \tag{52}$$

Als we nu beide zijden integreren van $t = 0$ tot t, en voor $t = 0$ de Big Bang nemen, $a(t = 0) = 0$, dan krijgen we

$$\frac{2}{3}a^{3/2} = \sqrt{\frac{8\pi G\rho_0}{3}}\, t \tag{53}$$

en

$$a(t) = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{2/3} \tag{54}$$

waarbij de constanten in bovenstaande vergelijking verwerkt zijn in t_0, de huidige tijd (want we weten dat $a(t_0) = 1$, per definitie). Deze oplossing moet iedere kosmoloog kunnen dromen, het is de Einstein-de Sitter oplossing en het referentiepunt voor bijna alle kosmologische beschouwingen !

l) Neem vervolgens aan dat je in een leeg heelal leeft, dwz. $\rho = 0$. Hoe expandeert dit Heelal, dwz. wat is $a(t)$? (dit is een asymptotische oplossing voor een Heelal met $\Omega < 1$).
Hierbij volg je hetzelfde recept, je gaat beginnen met de Friedman-vergelijking,

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho a^2 - \frac{kc^2}{R_0^2}\,. \tag{55}$$

Nu kun je niet aannnemen dat $k = 0$, maar wel is gegeven dat $\rho = 0$. Dan volgt dus:

$$\dot{a}^2 = -\frac{kc^2}{R_0^2} = cst. \tag{56}$$

De rechterzijde is de constante krommingsterm. Merk op dat omdat $\dot{a}^2 > 0$, de enige mogelijke oplossing impliceert dat $k = -1$. Met andere woorden, een leeg Friedman heelal is altijd negatief (hyperbolisch) gekromd ! De oplossing vinden is niet zo moeilijk, de bovenstaande differentiaalvergelijking zegt namelijk dat

$$\dot{a} = cst. \tag{57}$$

Met andere woorden, de oplossing volgt direct (door integratie als in (k)),

$$a(t) = \left(\frac{t}{t_0}\right)\,. \tag{58}$$

Een leeg heelal expandeert dus zonder af te remmen, lineair in de tijd ! Dat is natuurlijk heel logisch !

Opgave 3: De Microgolfachtergrondstraling

Het belangrijkste bewijs voor de Big Bang is de ontdekking van de microgolfachtergrondstraling door Penzias & Wilson in 1965. We gaan hier in iets meer in op dit kosmische stralingsveld.

Laten we ons voor de eenvoud beperken tot een heelal dat is gevuld met materie en straling, zonder kosmologische constante. Hiervoor zijn de Friedman vergelijkingen:

$$\begin{aligned} \ddot{a} &= -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho + \frac{3p}{c^2}\right) a \\ \dot{a}^2 &= \frac{8\pi G}{3}\rho a^2 - \frac{kc^2}{R_0^2} \end{aligned} \tag{59}$$

a) Laat zien dat deze twee Friedman vergelijkingen een derde vergelijking impliceren,

$$\dot{\rho} + 3\,(\rho + \frac{p}{c^2})\,\frac{\dot{a}}{a} = 0 \tag{60}$$

Vermenigvuldig beide zijden van de eerste Friedman vergelijking (de versnellingsvergelijking) met $2\dot{a}$, terwijl je van de tweede (de expansievergelijking) de tijdsafgeleide neemt, d/dt,

$$\begin{aligned} 2\dot{a}\ddot{a} &= -\frac{8\pi G}{3}\left(\rho + \frac{3p}{c^2}\right) a\,\dot{a} \\ 2\dot{a}\ddot{a} &= \frac{8\pi G}{3}\left(\dot{\rho}a^2 + 2\rho a\dot{a}\right) \end{aligned} \tag{61}$$

waarbij je natuurlijk gebruikt dat de afgeleide van de constante krommingsterm nul is. Door nu de bovenste van de onderste vergelijking af te trekken zie je dat beide termen aan de linkerkant tegen elkaar wegvallen. Je houdt dan alleen de termen aan de rechterkant over,

$$0 = \frac{8\pi G}{3}\left(\dot{\rho}a^2 + 2\rho a\dot{a} + \rho\, a\dot{a} + \frac{3p}{c^2}\,a\dot{a}\right). \tag{62}$$

Door nu door a^2 te delen, houden we dan over dat

$$\dot{\rho} + 3\,(\rho + \frac{p}{c^2})\,\frac{\dot{a}}{a} = 0\,. \tag{63}$$

Dit is wat moest worden afgeleid. Deze vergelijking is in feite een derde relevante Einsteinvergelijking, die in deze situatie van een homogeen en isotroop heelal echter niet onafhankelijk is van de rest.

b) Beargumenteer dat deze vergelijking impliceert dat de expansie van het Heelal adiabatisch is. Dwz., laat zien dat het impliceert dat de interne energieinhoud $U = \rho c^2 V$ in een volume $V \propto a^3$, dwz. een volume dat expandeert tgv. de uitdijing van het Heelal, voldoet aan het verband

$$dU \;=\; -p\,dV \tag{64}$$

Laten we ten eerste naar de schaling van het volume V met de expansiefactor a kijken. We weten dat tov. een huidig kosmische volume V_0, het volume V evolueert als,

$$V \;=\; V_0\,a^3 \tag{65}$$

Als we hier de afgeleide naar de tijd van nemen, vinden we dus dat een volume V evolueert volgens

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \frac{d}{dt}(V_0 a^3) \\ &= 3V_0 a^2 \dot{a} \\ &= 3V_0 a^3 \frac{\dot{a}}{a} \\ &= 3VH\,. \end{aligned} \tag{66}$$

Als we nu teruggaan naar de verandering van de interne energie U van het volume V, en gebruikmaken van het bovenstaande resultaat, dan vinden we dat

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dt} &= \frac{d\rho c^2 V}{dt} \\ &= \dot{\rho} c^2\,V \;+\; \rho c^2\,\dot{V} \\ &= \dot{\rho} c^2\,V \;+\; 3\rho c^2\,HV \end{aligned} \tag{67}$$

Neem nu de energievergelijking vgl. 63 en vermenigvuldig met c^2V, dan zien we dat het gelijk is aan

$$\dot{\rho} c^2 V \;+\; 3\rho\,c^2\,HV \;=\; -3pHV \tag{68}$$

waarbij de linkerterm gelijk is aan dU/dt (zie vgl. 68) en de rechterterm aan $-pdV/dt$ (zie vgl. 67. Maw., de energievgl. (vgl. 63 is geheel gelijk aan de

$$\frac{dU}{dt} \;=\; -p\,\frac{dV}{dt}\,, \tag{69}$$

de verandering in interne energie is gelijk aan de arbeid die door de druk wordt uitgeoefend ! Dit is een fundamenteel thermodynamisch resultaat en laat zien dat de uitdijing van het Heelal geheel adiabatisch is.

c) De repercussie van het bovenstaande is groot: de expansie van het heelal is adiabatisch, dus de uitdijing van het Heelal gaat ten koste van de energiedichtheid van het Heelal !!!! We weten dat de temperatuur T voor een adiabatisch medium geldt dat $TV^{\gamma-1} = cst.$ Voor het fotongas (straling) geldt een adiabatische index $\gamma \propto 4/3$. Leidt hieruit af hoe de temperatuur T van de kosmische achtergrondstraling verandert ten gevolge van de expansie van het Heelal.
Voor een adiabatisch gas, geldt dat de temperatuur van het gas verandert volgens de gaswet

$$TV^{\gamma-1} \,=\, cst.\,, \tag{70}$$

waarbij γ de adiabatisch gas index is. Voor een fotongas geldt dat $\gamma = 4/3$, voor een monatomisch gas zoals neutraal waterstof is $\gamma = 5/3$. Voor de fotonen van de kosmische (achtergrond)straling geldt dus dat hun temperatuur T_{rad}:

$$T_{rad}V^{1/3} \,=\, cst. \qquad \rightarrow \qquad T_{rad} \propto V^{-1/3}\,. \tag{71}$$

Omdat het volume V verandert met de expansiefactor a als $V \propto a^3$, vinden we dat de stralingstemperatuur van de kosmische (achtergrond)straling verandert volgens

$$T \propto a^{-1} \qquad \rightarrow \qquad T_{rad} \,=\, \frac{T_0}{a}\,, \tag{72}$$

waarbij $T_0 \,=\, 2.725\,\mathrm{K}$ de huidige temperatuur is van de kosmische straling.

d) De kosmische achtergrondstraling blijkt een perfect thermische straling te zijn, met een perfect Plank spectrum: de energieverdeling van fotonen met een frequentie ν gegeven door:

$$u_\nu(T) \,=\, \frac{8\pi h\nu^3}{c^3}\,\frac{1}{\exp(h\nu/kT)-1}, \tag{73}$$

waarbij $u_\nu(T)$ de energiedichtheid is van de kosmische stralings (CMB) fotonen met frequentie ν [3]. Als je nu weet dat tengevolge van de Hubble expansie van het Heelal de golflengte λ van licht naar het rood verschuift, dwz.

$$\lambda(t) \,=\, a(t)\lambda_0 \tag{74}$$

laat dan zien dat de kosmische fotonen altijd een Planck spectrum zullen behouden. Met andere woorden, we weten dat door aan te tonen dat het nu een perfect Planck spectrum heeft met temperatuur

[3] De Boltzmann constant $k = 1.3807\times10^{-16}$erg K^{-1}, de Planck constante $h = 6.6261\times 10^{-27}$erg s en de lichtsnelheid in vacuüm $c = 2.99792458\times10^{10}$ cm s^{-1}.

$T_0 = 2.725K$, het altijd pure thermische straling is geweest. Ook veel vroeger in het Heelal. Dit op zichzelf kan alleen worden begrepen als het Heelal ooit door een zeer hete en zeer dichte fase is gegaan: het ultieme bewijs voor de Big Bang. Hiervoor is intussen maar liefst tweemaal de Nobelprijs natuurkunde toegekend, aan Penzias en Wilson in 1978 voor de ontdekking van de CMB en in 2006 aan John Mather voor het aantonen van het absoluut perfecte zwarte lichaams gedrag van de CMB !!!!
We moeten dus nagaan of tengevolge van de expansie van het Heelal de straling zijn zwarte lichaamskarakter blijf behouden, dwz. dat zijn energieverdeling nog steeds blijft voldoen aan de karakteristieke Planckwet. Met name moeten we dan kijken naar de term in de noemer:

$$\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1\,. \tag{75}$$

Omdat tengevolge van de expansie van het heelal de roodverschuiving van de fotonen gaat als $\nu(t) = \nu_0/a(t)$, en $T = T_0/a$ (vraag c), vinden we dat op ieder moment

$$\begin{aligned} \exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1 &= \exp\left(\frac{h\nu_0/a}{kT_0/a}\right) - 1 \\ &= \exp\left(\frac{h\nu_0}{kT_0}\right) - 1\,, \end{aligned} \tag{76}$$

zodat we zien dat ook bij de temperatuur T de energieverdeling zijn Planck karakter behoudt. De term $\propto \nu^3$ verandert natuurlijk wel: deze bepaalt de totale energiedichtheid en die neemt af tengevolge van de expansie van het Heelal. Overigens, is het goed te beseffen dat de Planck kromme niet alleen steeds een kleinere amplitude krijgt tengevolge van de uitdijing van het Heelal, maar dat de piek van de energieverdeling ook verschuift naar lagere frequentie (en energie) omdat de temperatuur afneemt: bij de huidige temperatuur van $T_0 = 2.725$ K piekt deze bij microgolf golflengten. Vandaar dat we spreken van Microgolfachtergrondstraling ! Toen het heelal 379,000 jaar oud was, bij de combinatie van protonen en electronen tot waterstofatomen en het transparant worden van het Heelal, was de temperatuur rond $T \approx 3000$ K. De straling piekte toen bij dieprood, zodat de hele nachthemel er rood zou uitzien (en je vervolgens zou verdampen tengevolge van de hitte). Nog veel vroeger, toen het Heelal 3 minuten oud was en de heliumatomen werden gevormd, piekte de straling bij gammastraling frequenties: een zeer ongezonde omgeving.

e) Laat zien dat de dichtheid aan fotonen, dus de totale hoeveelheid fotonen van alle frequenties in een bepaald volume, gegeven wordt door

$$n_\gamma \;=\; 60.4 \left(\frac{kT}{hc}\right)^3 \tag{77}$$

Maak hierbij gebruik van het feit dat de integraal

$$\int_0^\infty \frac{x^2\,dx}{e^x - 1} \;\approx\; 2.4045 \tag{78}$$

De energiedichtheid $u_\nu(T)$ geeft de energiedichtheid van fotonen met een frequentie ν. We weten dat ze een energie $E_\nu = h\nu$ hebben, dus het aantal n_ν van dat soort fotonen volgt simpelweg uit het feit dat $u_\nu(T) = n_\nu(T)\,h\nu$, en dus (zie vgl. 73),

$$n_\nu(T) \;=\; \frac{u_\nu}{h\nu} \;=\; \frac{8\pi\nu^2}{c^3}\,\frac{1}{\exp\left(h\nu/kT\right) - 1}, \tag{79}$$

Het totaal aantal fotonen, dwz. fotonen van alle frequenties, volgt dan door n_ν te integreren over alle frequenties,

$$N \;=\; \int_0^\infty n_\nu\,d\nu \;=\; \frac{8\pi}{c^3}\int_0^\infty \frac{\nu^2\,d\nu}{\exp\left(h\nu/kT\right) - 1}\,. \tag{80}$$

Deze integraal kunnen we oplossen gebruikmakend van een standaard oplossing,

$$\begin{aligned}
N \;&=\; \frac{8\pi}{c^3}\int_0^\infty \frac{\nu^2\,d\nu}{\exp\left(h\nu/kT\right) - 1} \\
&=\; 8\pi\left(\frac{kT}{hc}\right)^3 \int_0^\infty \left(\frac{h\nu}{kT}\right)^2 \frac{1}{\exp\left(h\nu/kT\right) - 1}\,d\left(\frac{h\nu}{kT}\right) \qquad (81) \\
&=\; 8\pi\left(\frac{kT}{hc}\right)^3 \int_0^\infty \frac{x^2\,dx}{\exp\left(x\right) - 1}\,,
\end{aligned}$$

waarbij we gebruik hebben gemaakt van de substitutie

$$x \;\equiv\; \frac{h\nu}{kT}\,. \tag{82}$$

Omdat gegeven is dat de standaardintegraal

$$\int_0^\infty \frac{x^2\,dx}{e^x - 1} \;\approx\; 2.4045\,, \tag{83}$$

vinden we dus dat de dichtheid aan fotonen van de kosmische achtergrondstraling gegeven is door

$$N \;\approx\; 60.4\left(\frac{kT}{hc}\right)^3\,. \tag{84}$$

Het aantal fotonen per volume schaalt dus evenredig met T^3, en dus als $a(t)^{-3}$: precies met het toenemende kosmische volume tengevolge van de uitdijing van het Heelal. Maw.: het aantal fotonen blijft constant ! Het heelal creeert zelf geen nieuwe fotonen, noch worden ze geannihileerd. Hierbij past een kleine footnote: natuurlijk komen er wel wat fotonen bij, tengevolge van de sterren die in het Heelal worden gevormd. Hun fotonenproductie, geintegreerd over de gehele leeftijd van het Heelal, is echter slechts een minieme fractie van het totaal aantal fotonen. Merk ook op dat omdat de energie van fotonen gestaag daalt volgens $1/a$, hun aandeel in de energiedichtheid van het Heelal ook geleidelijk afneemt.

f) De huidige temperatuur van de kosmische microgolfachtergrondstraling is $T = 2.725$ K. Bereken hoeveel CMB fotonen er per cm^3 zijn. Met behulp van je rekenmachine en de gegeven waarden van de constanten h, c en k (let op consistentie in de eenheden), vindt je

$$N \approx 60.4 \left(\frac{kT}{hc}\right)^3 \approx 410 \text{ fotonen/cm}^3 , \tag{85}$$

bij een temperatuur van $T = 2.725$ K.

g) Als je nu weet dat de dichtheid aan atomaire (baryonische) materie in het heelal is bepaald door de dichtheidsparameter Ω_b, laat dan zien dat het aantal baryonen (protonen en neutronen) in het Heelal gegeven wordt door:

$$n_b \approx 1.12 \times 10^{-5} \Omega_b h^2 \, \mathrm{cm}^{-3} , \tag{86}$$

waarbij de Hubble parameter gegeven wordt door $H = 100h \mathrm{km\ s}^{-1} \mathrm{Mpc}^{-1}$. Je mag hierbij aannemen dat de massa van het neutron ongeveer gelijk is aan dat van het proton, $m_n \approx m_p \approx 1.672 \times 10^{-24}$ g.
Uitgaande van de Ω_b, weten we (uit de definitie van de grootheid Ω_b) dat de dichtheid ρ_b aan baryonen volgt uit

$$\rho_b = \Omega_b \, \rho_{crit} , \tag{87}$$

waarbij de kritische dichtheid gegeven wordt door

$$\rho_{crit} = \frac{3H^2}{8\pi G} = 1.88 \times 10^{-29} \, h^2 \, \mathrm{g\, cm}^{-3} . \tag{88}$$

Hierbij hebben we onze (relatieve) onzekerheid over de juiste waarde van de Hubble parameter H_0 verborgen in een kleine factor h, zodat per definitie $H_0 = h\, 100 \, \mathrm{km\, s}^{-1}\, \mathrm{Mpc}^{-1}$ (sinds enkele jaren kennen we H_0 veel beter, $H_0 \approx 71 \, \mathrm{km\, s}^{-1}\, \mathrm{Mpc}^{-1}$, zodat $h = 0.71$). Bijgevolg vinden we voor ρ_b,

$$\rho_b = 1.88 \times 10^{-29} \, \Omega_b h^2 \mathrm{g\, cm}^{-3} . \tag{89}$$

Veruit het grootste aandeel van baryonen wordt uitgemaakt door protonen en neutronen. Als we de neutron massa ruwweg gelijk veronderstellen aan de protonmassa, dwz. $m_n \approx m_p \approx 1.6726 \times 10^{-24}\,\mathrm{g}$, dan vinden we dat de gemiddelde dichtheid aan protonen en neutronen in het Heelal volgt uit (vgl. 89),

$$n_b = \frac{\rho_b}{m_p} \approx 1.124 \times 10^{-5}\,\Omega_b h^2\,\mathrm{cm}^{-3}\,. \tag{90}$$

h) Leidt uit bovenstaande af dat de huidige verhouding η_0 tussen het aantal fotonen en baryonen gegeven wordt door:

$$\eta_0 \;=\; \frac{n_{rad,0}}{n_{b,0}} \;\approx\; 3.65 \times 10^7\,\frac{1}{\Omega_{b,0}h^2} \tag{91}$$

De (zeer belangrijke) foton-baryon verhouding η_0 volgt direct uit:

$$\begin{aligned}\eta_0 \;\equiv\; \frac{n_{rad,0}}{n_{b,0}} \quad &= \quad \frac{410}{1.124 \times 10^{-5}}\,\frac{1}{\Omega_{b,0}h^2} \\ &= \quad 3.648 \times 10^7\,\frac{1}{\Omega_{b,0}h^2}\,. \end{aligned} \tag{92}$$

Voor de huidige waarden voor de baryon dichtheidsparameter $\Omega_{b,0} = 0.044$ en $h = 0.71$, vinden we dan dat

$$\eta_0 \;=\; 1.64 \times 10^9\,. \tag{93}$$

Met andere woorden, in ons Heelal zijn er meer dan een miljard fotonen voor ieder proton en neutron !!!!!!!! Dat is overweldigend, en totaal uniek voor welk fysisch systeem dan ook ! Het heeft zeer belangrijke repercussies voor de thermische geschiedenis van het Heelal !

i) Laat zien dat de foton-baryon verhouding constant is, dwz. niet verandert tijdens de expansie van het Heelal. Maw. laat zien dat $\eta(z) = \eta_0$. Dit is een uiterst belangrijk resultaat. De foton-baryon verhouding is een van de meest fundamentele parameters van het Heelal, en bepaalt zijn thermische evolutie. In feite is het gelijk aan de entropie van ons universum, en deze blijkt dus ongekend hoog te zijn. We kennen geen enkel ander fysisch systeem met zo'n hoge entropie.
We hebben eerder al gezien dat de fotondichtheid $n_{rad}(t)$ evolueert volgens

$$\begin{aligned} n_{rad}(t) \quad &= \quad 60.4\left(\frac{kT}{hc}\right)^3 \\ &= \quad 60.4\left(\frac{kT_0}{hc}\right)^3 \left(\frac{T(t)}{T_0}\right)^3 \\ &= \quad n_{rad,0}\left(\frac{T(t)}{T_0}\right)^3 \;\propto\; \frac{n_{rad,0}}{a^3}\,. \end{aligned} \tag{94}$$

De baryondichtheid verdunt natuurlijk op de gebruikelijke manier met $1/a^3$,

$$n_b(t) = \frac{n_{b,0}}{a^3} \tag{95}$$

Dan vinden we dus voor de foton-baryon verhouding $\eta(t)$,

$$\eta(t) = \frac{n_{rad}(t)}{n_b(t)} = \frac{n_{rad,0}}{n_{b,0}} \frac{1/a^3}{1/a^3} = \frac{n_{rad,0}}{n_{b,0}} = \eta_0 \,, \tag{96}$$

dus, samenvattend, vinden we dat:

$$\eta(t) = \eta_0 \,. \tag{97}$$

Met andere woorden, de foton-baryon verhouding is een constante van het Heelal !!! Ooit, in het vroege heelal is deze factor bepaald tengevolge van fysische processen welke we nog niet geheel begrijpen: waarom er zoveel fotonen zijn en waarom zo weinig materie (of, eigenlijk, waarom er überhaupt materie is daar alles verdwenen zou zijn geweest indien er evenveel materie als antimaterie was gemaakt). Je kunt eenvoudig laten zien dat de ENTROPIE van het heelal gegeven wordt door deze foton-baryon verhouding ! We kunnen dus concluderen dat we in een heelal met hoge entropie leven !