Werkcollege II
De Melkweg

Opgave 1: Het Centrale Zwarte Gat

Het lijkt er op dat zich in het centrum van de Melkweg een superzwaar zwart gat bevindt. Aan de hand van de baan van ster S2 in de centrale cluster gaan we kijken naar de onzichtbare massa die de dynamica in het centrum beheerst.

Indien de centrale ster S_2 met massa M_2 draait om een massa M_1 (of, in feite, beiden om het gezamenlijke massa middelpunt), dan geldt volgens de wet van Kepler dat:

$$\left(\frac{P}{2\pi}\right)^2 = \frac{a^3}{G(M_1 + M_2)} . \tag{1}$$

Hierbij is a de lengte van de (semi-major) as van de baan, en P de periode van de baan, terwijl G de gravitatieconstante is.

a) Leidt af hoe de omloopsnelheid v

$$v(a) = \frac{2\pi a}{P} \tag{2}$$

van een ster afhangt van de afstand (baanas) tot het centrale object. Teken een grafiek waarin je $v(a)$ uitzet tegen a.

b) Leidt een uitdrukking af voor de relatie tussen a en P enerzijds en de centrale massa M_1 anderzijds, voor het (hier geldende) geval dat $M_1 \gg M_2$.

c) Ster S_2, waargenomen door de groep van A.Ghez (UCLA) heeft een periode P en afstand a,

$$\begin{aligned} P &= 15.2\,\mathrm{yrs} \\ a &= 4.62 \times 10^{-3}\,\mathrm{pc} \end{aligned}$$

Leidt hieruit af wat de massa M_1 (in zonsmassa's $M_\odot$[1]) is van de centrale massa.

Een supermassieve massa zoals jullie zojuist hebben afgeleid, zich bevindend in een gebied dat kleiner is dan 10 AU (=1.496×10^8 km), kan bijna niet anders zijn dan een zwart gat. De straal van zo'n zwart gat, aannemende dat het niet roteert, wordt gegeven door de Schwarzschild straal,

$$R_s = \frac{2GM}{c^2} \tag{3}$$

[1] een zonsmassa is $M_\odot = 1.989 \times 10^{30}$ kg; 1 pc=3.086×10^{16}m=3.262 ly; G=$6.674\times10^{-11}\mathrm{m^3kg^{-1}s^{-2}}$

d) Bereken de Schwarzschild straal van het supermassieve zwarte gat in het centrum van de Melkweg. Het is wellicht handig te gebruiken dat de evenredigheidsconstante ongeveer $2G/c^2 \approx 1.48 \times 10^{27}$ m/kg, oftewel 2.95 km/$M_\odot$.

e) Laat zien dat voor een Schwarzschild zwart gat de dichtheid als functie van zijn massa M, varieert als

$$\rho_s \propto M^{-2} \tag{4}$$

f) Bereken de dichtheid ρ_s van het superzware zwarte gat in het centrum van de Melkweg. Wat kun je hieruit concluderen mbt dit soort superzware zwarte gaten ?

Exercise 2:
Differentiële Rotatie van de Melkweg

Stel je voor dat we leven in een Melkweg wiens rotatiekromme $v(R)$ gegeven wordt door de volgende functie:

$$\begin{aligned} v(R) &= 110R \ \text{km/s} \qquad \text{voor} \ \ R = 0 - 2\,\text{kpc} \\ &= 220 \ \text{km/s} \qquad \text{voor} \ \ R > 2\,\text{kpc} \end{aligned} \tag{5}$$

a) Zet in een grafiek de rotatiesnelheid $v(R)$ uit als functie van de straal R.

b) Laat zien dat de rotatiesnelheid $v(R)$ van sterren die zich op perfect cirkelvormige banen bewegen tgv. de gravitationele aantrekking door de totale hoeveelheid mass $M(R)$ binnen de straal R gegeven wordt door:

$$M(R) = \frac{v(R)^2 R}{G} \tag{6}$$

c) Leidt de massaverdeling $M(R)$ af voor $R = 0 - 10$ kpc die behoort bij de rotatiekromme die hierboven is gegeven. Zet deze uit in een grafiek van massa $M(R)$ als functie van straal R.

d) Leidt ook de dichtheidsverdeling $\rho(R)$ voor deze massaverdeling af. Teken grafiek van dichtheid $\rho(R)$ als functie van straal R.

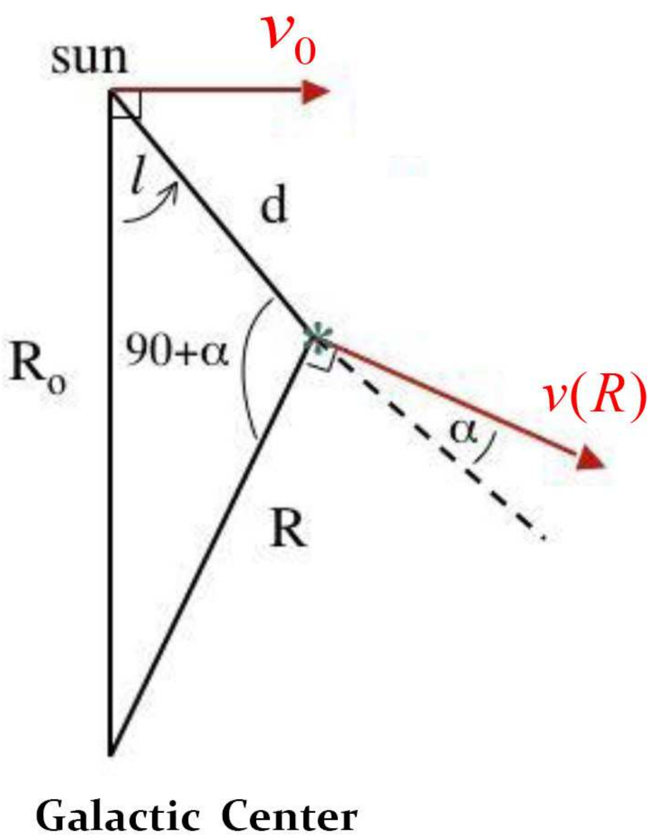
e) Nog niet zo lang geleden waren de schattingen voor de rotatiesnelheid v_0 van de Zon rond de Melkweg, en zijn afstand R_0 tot het centrum anders dan de meer nauwkeurige bepaling die we nu hebben. Nu gaan we uit van $R_0 = 8.5$ kpc en $v_0 = 220$ km/s. Hoe veranderde de schatting van de massa van de Melkweg binnen de zonscirkel, toen deze grootheden veranderden van $R_0 = 10$ kpc en $v_0 = 250$ km/s.

Laten we nu gaan kijken naar waarnemingen van waterstofwolken/sterren binnen de schijf van onze Melkweg. Voor de weergave van de configuratie zie figuur. We gaan kijken naar de radiële snelheid die we meten langs een gezichtslijn in de richting gegeven door de Galactische lengte l.

f) Laat zien dat de radiële snelheid voor een ster/wolk in de richting l op afstand R van het centrum van de Melkweg, gegeven wordt door

$$\begin{aligned} v_r(l, R) &= R_0 \sin l \left(\frac{v(R)}{R} - \frac{v_0}{R_0} \right) \\ &= R_0 \sin l \,(\Omega(R) - \Omega_0) \end{aligned} \tag{7}$$

waar $v_0 = 220$ km/s de rotatiesnelheid in de zonsomgeving is, en R_0 de afstand van de Zon tot het Galactisch Centrum is. $\Omega(R)$ en Ω_0 zijn de corresponderende hoeksnelheden.



g) Op welke afstand d van de Zon vindt je de wolken/sterren met maximale snelheid langs de gezichtslijn met lengte l.

h) Op een Galactische lengte van $l = 45°$, meten we dat een ster een radiële snelheid $v_r = 30$ km/s heeft. Wat is de afstand R van deze ster tot het Galactisch centrum, en wat is zijn afstand d tot de Zon ?[2]

i) Uitgaande van bovenstaande rotatiekromme, bereken de radiële snelheid van sterren die op een afstand $d = 1$, 5 en 10 kpc van de Zon staan, langs gezichtslijnen van $l = 10°$ en $l = 25°$ en $l = 40°$.

j) Laat zien dat de tangentiële snelheid voor een ster/wolk in dezelfde richting l op afstand R van het centrum van de Melkweg, gegeven wordt door

$$v_t(l,R) \;=\; R_0 \cos l \left(\frac{v(R)}{R} - \frac{v_0}{R_0} \right) \;-\; \frac{v(R)}{R}\, d \tag{8}$$

met d de afstand van de ster/wolk tot de Zon.

k) Bereken voor dezelfde gevallen ook de eigenbeweging (dwz. de beweging loodrecht op gezichtslijn, over de hemel) van de gaswolken en druk

[2] Neem aan dat de afstand van de Zon tot het Melkweg Centrum gelijk is aan $R_0 = 8.5$ kpc.

deze uit in boogseconden per jaar:

$$\theta_t = \frac{v_t(l, R)}{d} \tag{9}$$

Laten we nu naar een iets realistischer situatie gaan kijken, waarbij we niet te maken hebben met een vlakke rotatiecurve $v(R)$ in de omgeving van de Zon, maar met een $v(R)$ die afneemt naarmate we naar buiten bewegen. Laten we ons beperken tot het waarnemen van sterren in onze directe zonsomgeving, en dus tot sterren/wolken die een afstand $d \ll R_0$ hebben tot het centrum van de Melkweg. Dan is in goede benadering

$$R_0 - R \approx d \cos l \tag{10}$$

terwijl we de hoeksnelheid $\Omega(R)$ van deze objecten kunnen benaderen door een eerste orde Taylor expansie,

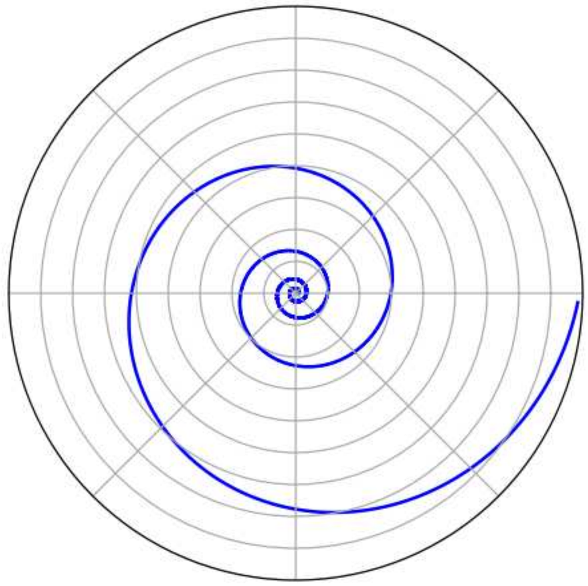
$$\Omega(R) - \Omega_0 \approx \left(\frac{d\Omega}{dR}\right)_{R_0} (R - R_0) \tag{11}$$

l) Leidt uit de vergelijking voor de radiële snelheid (eqn. 7) af dat deze in de zonsomgeving voor een ster op galactische lengte l en afstand d gegeven wordt door:

$$v_r(l) = A\, d \, \sin 2l\,, \tag{12}$$

waarbij A de beroemde **Oort Constante A** is, genoemd naar de vermaarde Nederlandse sterrenkundige Jan Hendrik Oort (1900-1992),

$$A = \frac{1}{2}\left[\frac{v_0}{R_0} - \left(\frac{dv}{dR}\right)_{R_0}\right]. \tag{13}$$



Exercise 3:
Logarithmische Spiraal

We kunnen de spiraalstructuur van sterrenstelsels benaderen door een logaritmische spiraal. Hierin parametriseer je de straal $r(\theta)$ als functie van de hoek θ door middel van de uitdrukking

$$r(\theta) \,=\, a\, e^{b\theta} \tag{14}$$

waarin a en b de twee parameters zijn die de grootte en windingsdichtheid van de spiraal bepalen. Merk op dat $\theta > 0$ na $\theta = 2\pi$ blijft doorlopen. In termen van de coördinaten $x(\theta)$ en $y(\theta)$,

$$\begin{aligned} x(t) \,&=\, a\, e^{b\theta}\, \cos\theta \\ y(t) \,&=\, a\, e^{b\theta}\, \sin\theta \end{aligned} \tag{15}$$

De parameter b is gerelateerd aan de pitch angle β of the spiral, i.e. the angle between the spiral and the circle of radius $r(\theta)$ at each location on the spiral (ie. the pitch angle is a constant. The pitch angle is

$$\beta \,=\, 90.0 \,-\, \arctan\frac{1}{b}\ . \tag{16}$$

a) Teken de logarithmische spiraal voor twee gevallen, voor pitch angles $\beta = 10^{\odot}$ and $\beta = 40^{\odot}$. Doe dit voor in totaal 4 windingen per spiraal, dwz. voor $\theta = [0, 8\pi]$.

Werkcollege 4

Van een zevental melkwegstelsels gaan we een aantal eigenschappen bepalen. De onderstaande tabel geeft een aantal gemeten grootheden weer. Deze zijn achtereenvolgens de naam van het stelsel, de afstand in Mpc, de radiële snelheid in km/s, de schijnbare magnitude, de extinctie (galactische voorgrond plus interne extinctie in het stelsel, de B-V kleur, de diameter in boogminuten en de HI profielbreedte.

Galaxy	Afstand	Vsys	m(B)	A(B)	B-V	Diameter	ΔV
NGC 1156	7.8	375	12.32	1.15	0.58	3.3 x 2.5	112
NGC 2403	3.3	131	8.93	0.67	0.47	21.9 x 12.3	242
NGC 2841	18.0	638	10.9	0.52	0.87	8.1 x 3.5	607
NGC 3351	10.1	778	10.53	0.45	0.80	7.4 x 5.0	281
NGC 3379	11.5	911	10.24	0.12	0.96	5.4 x 4.8	-
NGC 4621	14.8	410	10.57	0.15	0.94	5.4 x 3.7	-
NGC 5112	19.1	965	12.6	0.37	0.46	4.0 x 2.8	221

Bepaal de volgende eigenschappen van deze stelsels:

1. Het Hubble type (verklaar je antwoord)

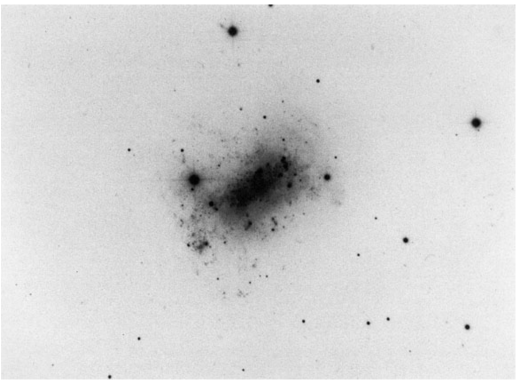
2. De diameters in kpc en de inclinatie in graden

3. De absolute magnitude en de totale helderheid in B uitgedrukt in zonshelderheden. De absolute magnitude van de zon in is 5.5

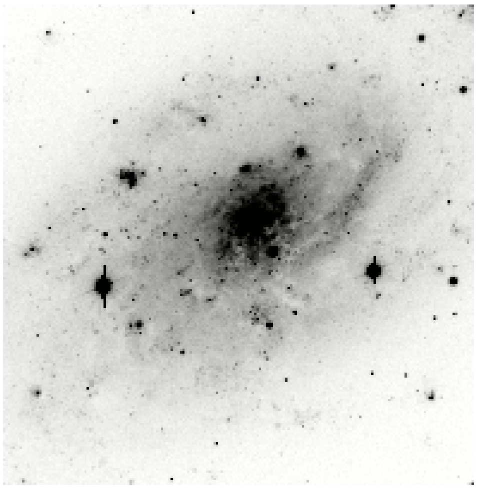
4. Bepaal van alle melkwegstelsels de gemiddelde oppervlaktehelderheid in magnituden per vierkante boogseconde

5. Bepaal de gecorrigeerde snelheidsbreedtes en plot de 5 stelsels die een HI waarneming hebben in een Tully-Fisher diagram. Is dit een redelijk resultaat?

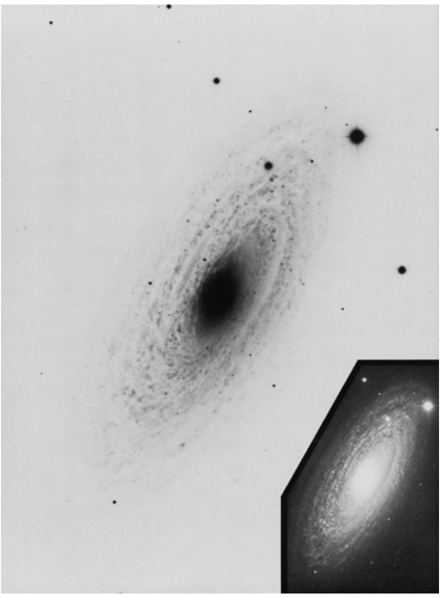
6. Plot voor de stelsels de radiële snelheid tegen de afstand.
   Bespreek of hierin de Hubble wet is te herkennen en als dit niet het geval is Waarom niet.



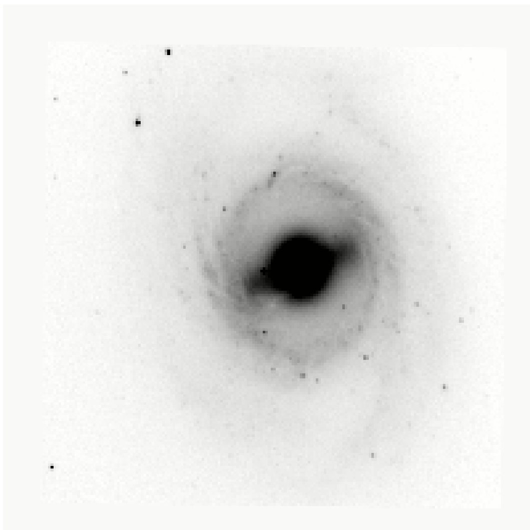
NGC 1156



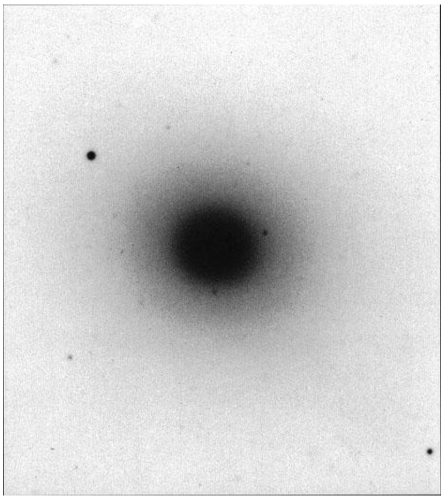
NGC 2403



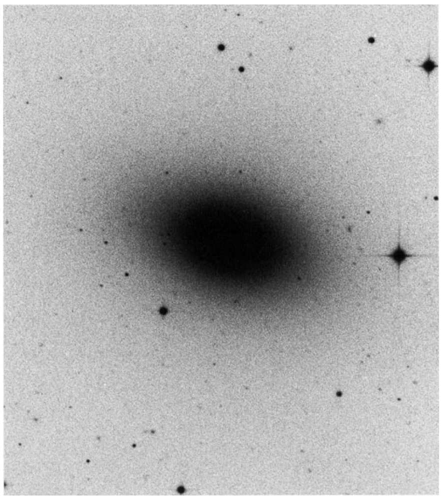
NGC 2841



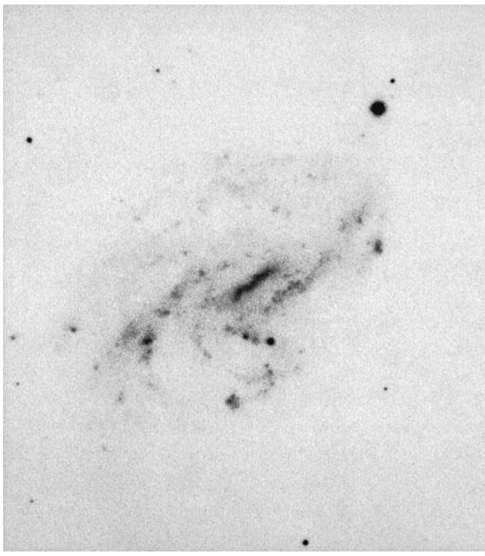
NGC 3351



NGC 3379



NGC 4621



NGC 5112