

# Sterrenstelsels en Kosmos

## Assignment 2

January 11, 2010

### Opgave 1: Het Centrale Zwarte Gat

Het lijkt er op dat zich in het centrum van de Melkweg een superzwaar zwart gat bevindt. Aan de hand van de baan van ster  $S_2$  in het centrale cluster gaan we kijken naar de onzichtbare massa die de dynamica in het centrum beheerst.

Indien de centrale ster  $S_2$  met massa  $M_2$  draait om een massa  $M_1$  (of, in feite, beiden om het gezamenlijke massa middelpunt), dan geldt volgens de wet van Kepler dat:

$$\left(\frac{P}{2\pi}\right)^2 = \frac{a^3}{G(M_1 + M_2)}. \quad (1)$$

Hierbij is  $a$  de lengte van de (semi-major) as van de baan, en  $P$  de periode van de baan, terwijl  $G$  de gravitatieconstante is.

- a) Leidt af hoe de omloopsnelheid  $v$

$$v(a) = \frac{2\pi a}{P} \quad (2)$$

van een ster afhangt van de afstand (baanas) tot het centrale object. Teken een grafiek waarin je  $v(a)$  uitzet tegen  $a$ .

**Oplossing** Herschrijf eerst de wet van Kepler:

$$P = \frac{2\pi}{\sqrt{G(M_1 + M_2)}} a^{3/2}$$

Dan volgt

$$v(a) = \sqrt{\frac{G(M_1 + M_2)}{a}} \propto a^{-1/2} \quad (3)$$

Zie figuur 1 voor de grafiek.

- b) Leidt een uitdrukking af voor de relatie tussen  $a$  en  $P$  enerzijds en de centrale massa  $M_1$  anderzijds, voor het (hier geldende) geval dat  $M_1 \gg M_2$ .

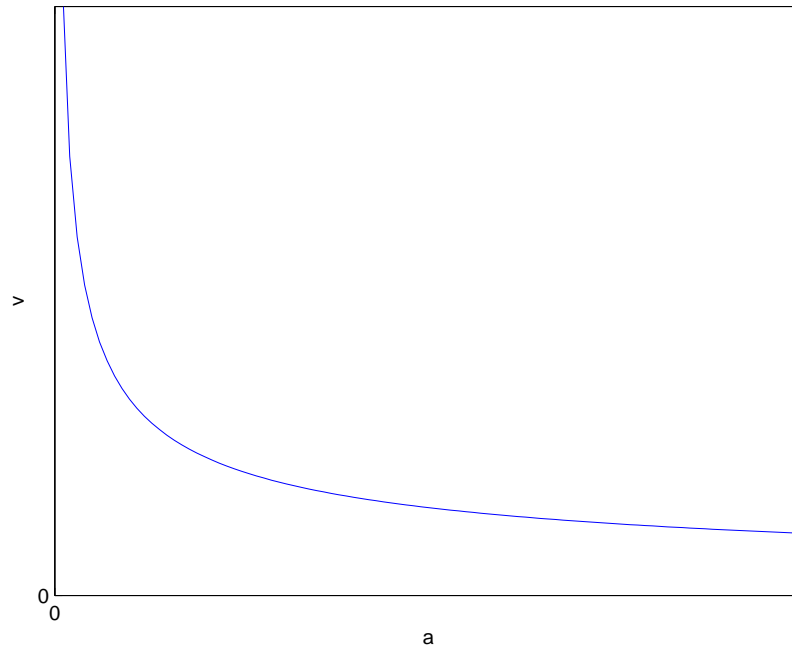
**Oplossing** Herschrijf weer de wet van Kepler:

$$M_1 + M_2 = \frac{(2\pi)^2 a^3}{G P^2}$$

$M_1 \gg M_2$ , dus:

$$M_1 \approx \frac{(2\pi)^2 a^3}{G P^2} \quad (4)$$

De omloopsnelheid  $v$  als functie van de afstand  $a$



Figuur 1: Figuur bij oplossing 1a)

c) Ster  $S_2$ , waargenomen door de groep van A.Ghez (UCLA) heeft een periode  $P$  en afstand  $a$ ,

$$\begin{aligned} P &= 15.2 \text{ yrs} \\ a &= 4.62 \times 10^{-3} \text{ pc} \end{aligned}$$

Leidt hieruit af wat de massa  $M_1$  (in zonsmassa's  $M_\odot$ <sup>1</sup>) is van de centrale massa.

**Oplossing** Vul de waarden in in formule 4 (gebruik één stelsel!):

$$\begin{aligned} M_1 &\approx \frac{(2\pi)^2}{6.674 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}} \frac{(4.62 \times 10^{-3} \times 3.086 \times 10^{16} \text{ m})^3}{(15.2 \times 365.25 \times 24 \times 3600 \text{ s})^2} \\ &\approx 7.45 \times 10^{36} \text{ kg} \\ &\approx 3.73 \times 10^6 M_\odot \end{aligned}$$

Een supermassieve massa zoals jullie zojuist hebben afgeleid, zich bevindend in een gebied dat kleiner is dan 10 AU ( $=1.496 \times 10^8 \text{ km}$ ), kan bijna niet anders zijn dan een zwart gat. De straal van zo'n zwart gat, aannemende dat het niet roteert, wordt gegeven door de Schwarzschild straal,

$$R_s = \frac{2GM}{c^2} \quad (5)$$

d) Bereken de Schwarzschild straal van het supermassieve zwarte gat in het centrum van de Melkweg. Het is wellicht handig te gebruiken dat de evenredigheidsconstante ongeveer  $2G/c^2 \approx 1.48 \times 10^{27} \text{ m/kg}$ , oftewel  $2.95 \text{ km}/M_\odot$ .

**Oplossing**

$$\begin{aligned} R_s &= \frac{2GM}{c^2} \\ &\approx 2.95 \text{ km } M_\odot^{-1} \times 3.73 \times 10^6 M_\odot \\ &\approx 1.10 \times 10^7 \text{ km} \\ &\approx 7.35 \times 10^{-2} \text{ AU} \\ &\approx 15.8 R_\odot \end{aligned}$$

<sup>1</sup>Een zonsmassa is  $M_\odot = 1.989 \times 10^{30} \text{ kg}$ ;  $1 \text{ pc} = 3.086 \times 10^{16} \text{ m} = 3.262 \text{ ly}$ ;  $G = 6.674 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$

- e) Laat zien dat voor een Schwarzschild zwart gat de gemiddelde dichtheid als functie van zijn massa  $M$ , varieert als

$$\rho_s \propto M^{-2} \quad (6)$$

**Oplossing**

$$\begin{aligned} \rho_s &= \frac{M}{V_s} \\ &= \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R_s^3} \\ &= \frac{3}{4\pi} M \left( \frac{c^2}{2GM} \right)^3 \\ &= \frac{3}{4\pi} \left( \frac{c^2}{2G} \right)^3 M^{-2} \\ &\propto M^{-2} \end{aligned} \quad (7)$$

- f) Bereken de gemiddelde dichtheid  $\rho_s$  binnen de Schwarzschild straal van het superzware zwarte gat in het centrum van de Melkweg. Wat kun je hieruit concluderen m.b.t. dit soort superzware zwarte gaten?

**Oplossing**

$$\begin{aligned} \rho_s &= \frac{3}{4\pi} \left( \frac{1}{2.95 \text{ km } M_\odot^{-1}} \right)^3 (3.73 \times 10^6 M_\odot)^{-2} \\ &= 6.70 \times 10^{-16} M_\odot \text{ km}^{-3} \\ &= 1.34 \text{ kg cm}^{-3} \end{aligned}$$

De gemiddelde dichtheid van het superzware zwarte gat is niet het grootste van alle astronomische objecten. De dichtheid van een neutronenster is bijvoorbeeld in de orde van  $10^{11} \text{ kg cm}^{-3}$ ! En de dichtheid schaal met  $M^{-2}$ , dus kleinere zwarte gaten hebben een grotere dichtheid. Een zwart gat met een massa van  $1 M_\odot$  heeft een gemiddelde dichtheid die ongeveer  $10^{13}$  maal groter is dan de gemiddelde dichtheid van het zwarte gat in het centrum van de Melkweg. Dat betekent onder andere dat de getijdenkrachten in de buurt van het superzware zwarte gat veel minder sterk zijn dan in de buurt van een stellair zwart gat.

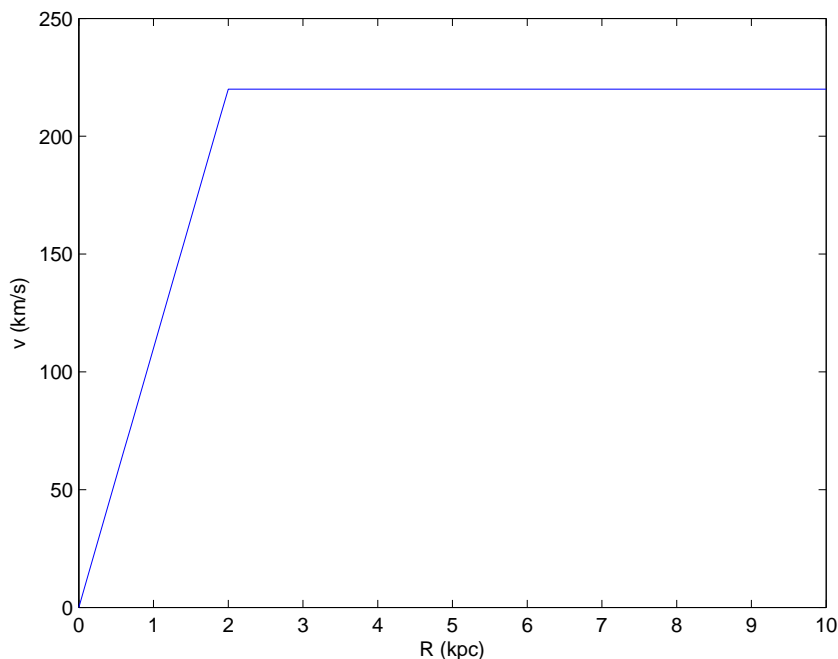
## Opgave 2: Differentiële Rotatie van de Melkweg

Stel je voor dat we leven in een Melkweg wiens rotatiekromme  $v(R)$  gegeven wordt door de volgende functie:

$$v(R) = \begin{cases} 110R \text{ (km/s)} & \text{voor } R \leq 2 \text{ kpc} \\ 220 \text{ (km/s)} & \text{voor } R > 2 \text{ kpc} \end{cases} \quad (8)$$

- a) Zet in een grafiek de rotatiesnelheid  $v(R)$  uit als functie van de straal  $R$ .

**Oplossing** Zie figuur 2.  $v(R)$  begint met 0 km/s bij  $R = 0$  en is een continue functie van  $R$ , zoals verwacht voor een stabiel systeem.



Figuur 2: De rotatiesnelheid  $v(R)$  als functie van de straal  $R$ .

- b) Laat zien dat de rotatiesnelheid  $v(R)$  van sterren die zich op perfect cirkelvormige banen bewegen t.g.v. de gravitationele aantrekkingskracht door de totale hoeveelheid massa  $M(R)$  binnen de straal  $R$  gegeven wordt door:

$$M(R) = \frac{v(R)^2 R}{G} \quad (9)$$

**Oplossing** De middelpuntzoekende of centrifugale kracht is de resulterende kracht die de ster in een cirkelvormige baan dwingt en de gravitatiekracht levert de benodigde middelpuntzoekende kracht. In het geval van een stabiele baan is de middelpuntzoekende kracht  $F_{mpz}$  gelijk aan de gravitatiekracht  $F_g$ :

$$F_{mpz} = F_g \\ \frac{mv(R)^2}{R} = \frac{GM(R)m}{R^2}$$

waarin  $G$  de gravitatieconstante is,  $R$  de straal van de baan van de ster,  $M(R)$  de totale massa binnen de straal  $R$ ,  $m$  de massa van de ster en  $v(R)$  de rotatiesnelheid van de ster op straal  $R$ . Oplossen voor  $M(R)$  geeft:

$$v(R)^2 = \frac{GM(R)}{R} \quad (10)$$

$$M(R) = \frac{v(R)^2 R}{G}$$

- c) Leidt de massaverdeling  $M(R)$  af voor  $R = 0 - 10$  kpc die behoort bij de rotatiekromme die hierboven is gegeven. Zet deze uit in een grafiek met massa  $M(R)$  als functie van straal  $R$ .

**Oplossing** Je kunt alleen de proportionaliteit uitrekenen of de complete formule met alle juiste constanten. De proportionaliteit van  $M(R)$  met  $R$  is:

$$M(R) \propto v(R)^2 R$$

$$\propto \begin{cases} R^3 & \text{voor } R \leq 2 \text{ kpc} \\ R & \text{voor } R > 2 \text{ kpc} \end{cases} \quad (11)$$

Als je de complete formule wilt met alle juiste constanten moet je er rekening mee houden dat  $R$  in formule 8 in kpc wordt ingevuld en dat  $v(R)$  in  $\text{km s}^{-1}$  uitgerekend wordt. Als je bovendien de totale massa  $M$  in eenheden van zonsmassa wilt uitdrukken, moet je de formule als volgt omrekenen naar de juiste eenheden:

$$\frac{M}{[\text{kg}]} = \frac{v^2(R)}{[\text{m s}^{-1}]^2} \frac{R}{[\text{m}]} \frac{[\text{m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2}]}{G}$$

$$= \frac{v^2(R)}{[\text{m s}^{-1}]^2} \left( \frac{[10^3 \text{ m}]}{[1 \text{ km}]} \right)^2 \frac{R}{[\text{m}]} \frac{[3.086 \times 10^{19} \text{ m}]}{[1 \text{ kpc}]} \frac{[\text{m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2}]}{G} \frac{[1 \text{ M}_\odot]}{[1.99 \times 10^{30} \text{ kg}]}$$

$$\frac{M}{[\text{M}_\odot]} = C_1 \frac{v^2(R)}{[\text{km s}^{-1}]^2} \frac{R}{[\text{kpc}]} \frac{[\text{m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2}]}{G}$$

met  $C_1 = 1.55 \times 10^{-5}$ . Nu kunnen we formule 8 met  $R$  in kpc invullen:

$$M = \begin{cases} C_1 \frac{110^2 R^3}{G} & \text{voor } R \leq 2 \text{ kpc} \\ C_1 \frac{220^2 R}{G} & \text{voor } R > 2 \text{ kpc} \end{cases} \quad (12)$$

De totale massa  $M$  binnen 2 kpc is dan bijvoorbeeld:

$$M = 1.55 \times 10^{-5} \frac{(110)^2 \times (2 \text{ kpc})^3}{6.673 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2}}$$

$$= 2.25 \times 10^{10} \text{ M}_\odot$$

Zie figuur 3 voor de bijbehorende grafiek.

- d) Leidt ook de dichtheidsverdeling  $\rho(R)$  voor deze massaverdeling af. Teken de grafiek van dichtheid  $\rho(R)$  als functie van straal  $R$ .

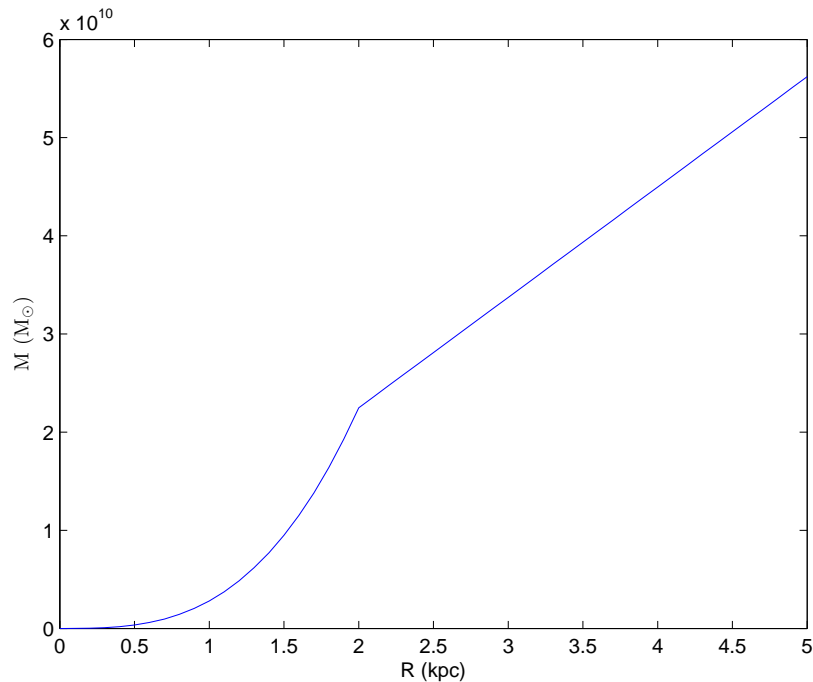
**Oplossing** De gemiddelde dichtheid  $\rho$  op straal  $R$  is:

$$\rho(R) = \frac{M(R)}{\frac{4}{3}\pi R^3} \quad (13)$$

Als we direct alle constanten volledig doorrekenen wordt dit:

$$\rho(R) = \begin{cases} \frac{3}{4\pi} \frac{110^2 C_1}{G} & \text{voor } R \leq 2 \text{ kpc} \\ \frac{3}{4\pi} \frac{220^2 C_1}{GR^2} & \text{voor } R > 2 \text{ kpc} \end{cases} \quad (14)$$

$$\propto \begin{cases} \text{constant} & \text{voor } R \leq 2 \text{ kpc} \\ \frac{1}{R^2} & \text{voor } R > 2 \text{ kpc} \end{cases}$$



Figuur 3: De totale massa  $M$  binnen straal  $R$ .

waarbij  $R$  nog steeds in kpc ingevuld wordt,  $G$  in SI-eenheden is en  $\rho$  in  $M_{\odot} \text{ kpc}^{-3}$  uitgedrukt wordt. De gemiddelde dichtheid  $\rho$  binnen 8.5 kpc (ongeveer de afstand van de Zon tot het middelpunt van de Melkweg) is dan bijvoorbeeld:

$$\begin{aligned}
 \rho &= \frac{3}{4\pi} \frac{220^2 \times 1.55 \times 10^{-5}}{6.673 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2} \times (8.5 \text{ kpc})^2} \\
 &= 3.7 \times 10^7 M_{\odot} \text{ kpc}^{-3} \\
 &= 2.5 \times 10^{-27} \text{ kg cm}^{-3}
 \end{aligned}$$

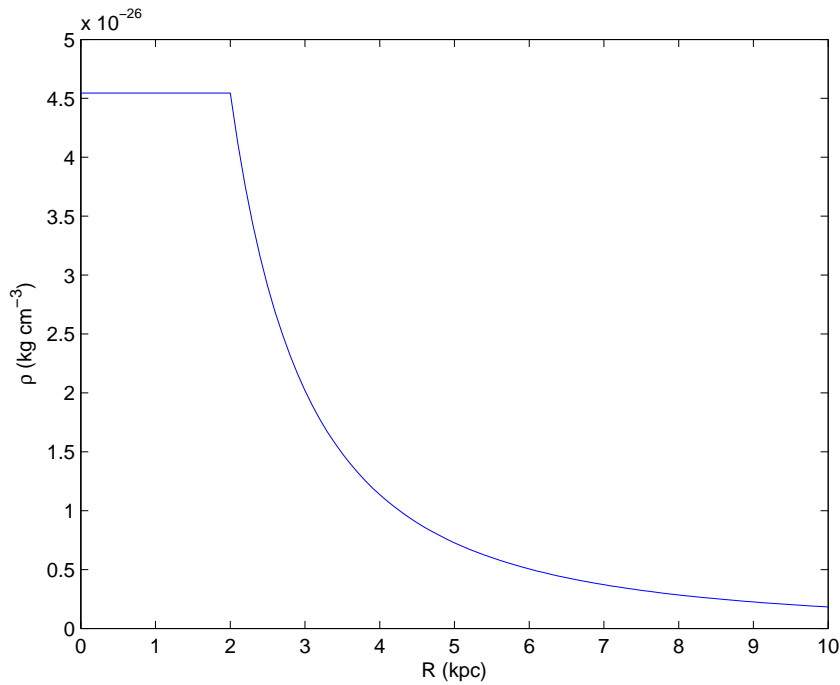
Het zwarte gat in het centrum van de Melkweg is met ca.  $1.34 \text{ kg cm}^{-3}$  (uit opgave 1f) inderdaad een flink stuk compacter!

En in vergelijking met de werkelijke gemiddelde dichtheid in de buurt van de Zon (binnen een straal van 65 ly vanaf de Zon) van ongeveer  $4 \times 10^{-27} \text{ kg cm}^{-3}$  lijkt dit een aannemelijke waarde. De gemiddelde dichtheid is iets hoger dan berekend, omdat wij in een spiraalarm van de Melkweg zitten (de Orionarm).

Zie figuur 4 voor de bijbehorende grafiek.

- e) Nog niet zo lang geleden waren de schattingen voor de rotatiesnelheid  $v_0$  van de Zon rond de Melkweg, en de afstand  $R_0$  tot het centrum anders dan de meer nauwkeurigere bepaling die we nu hebben. Nu gaan we uit van  $R_0 = 8.5 \text{ kpc}$  en  $v_0 = 220 \text{ km/s}$ . Hoe veranderde de schatting van de massa van de Melkweg binnen de zonscirkel, toen deze grootheden veranderden van  $R_0 = 10 \text{ kpc}$  en  $v_0 = 250 \text{ km/s}$ .

**Oplossing** In principe wordt alleen de verandering van de schatting gevraagd. We kunnen dus voldoen met de relatieve verhouding van de nieuwe schatting van de massa  $M$  met de oude schatting  $M'$ :



Figuur 4: De gemiddelde dichtheid  $\rho$  binnen straal  $R$ .

$$\begin{aligned}
 \frac{M(R_0)}{M'(R'_0)} &= \frac{v_0^2 R_0}{v_0'^2 R'_0} \\
 &= \left(\frac{v_0}{v_0'}\right)^2 \left(\frac{R_0}{R'_0}\right) \\
 &= \left(\frac{220}{250}\right)^2 \left(\frac{8.5}{10}\right) \\
 &\approx 0.66
 \end{aligned}$$

De huidige massaschatting is dus ongeveer 66% van de vroegere massaschatting.

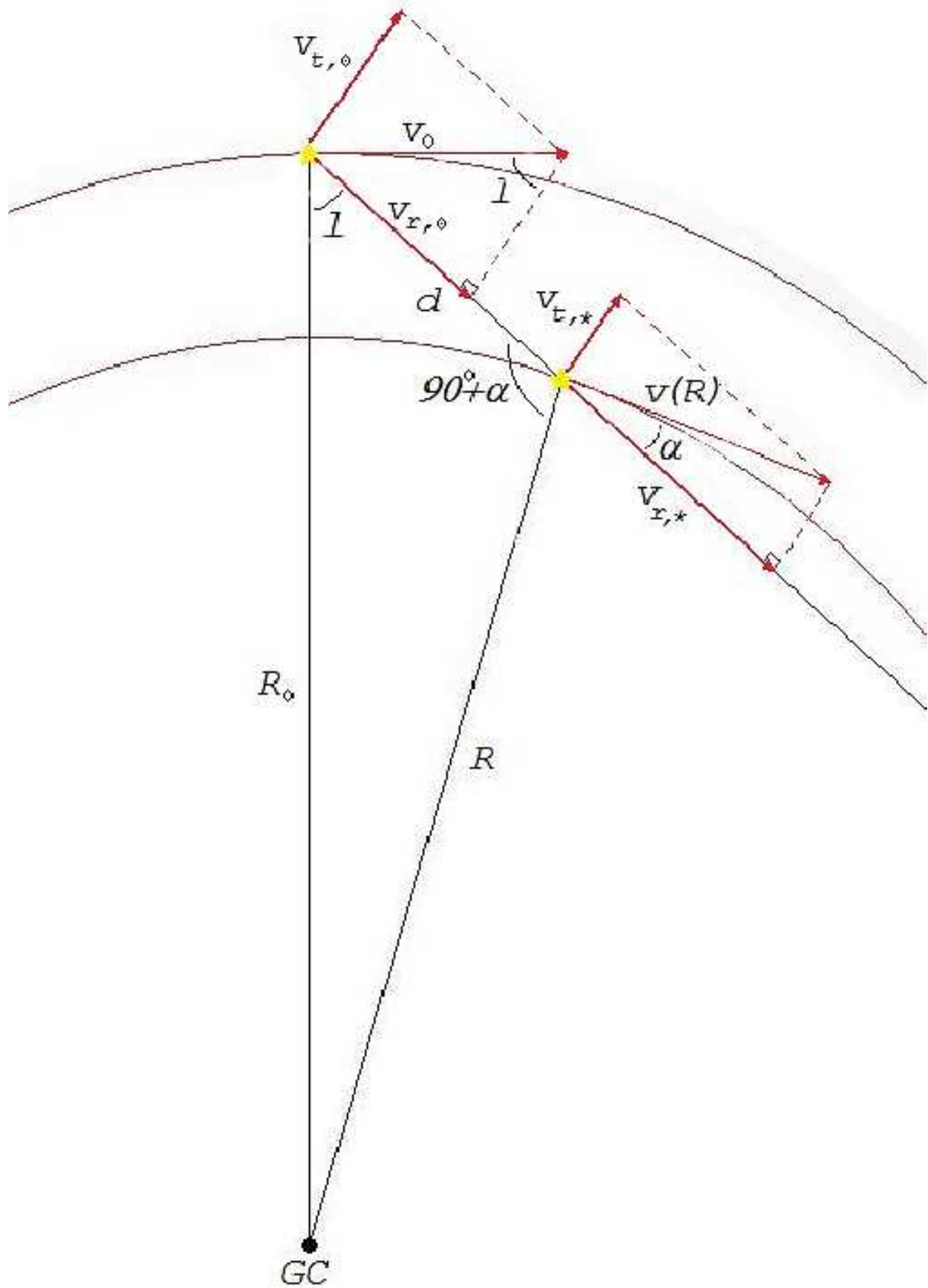
Laten we nu gaan kijken naar waarnemingen van waterstofwolken/sterren binnen de schijf van onze Melkweg. Voor een weergave van de configuratie zie figuur 5.

De Zon beweegt zich in een cirkelbaan op straal  $R_0$  en we gaan een gebied observeren in een baan op straal  $R$  op galactische lengte (galactic longitude)  $l$ .  $l$  is de hoek tussen de gezichtslijn naar het Galactisch Centrum en de gezichtslijn naar het waargenomen object<sup>2</sup>.  $d$  is de afstand tot dit gebied. De snelheden  $v_0$  en  $v(R)$  van de Zon en het object staan loodrecht op  $R_0$  en  $R$ , respectievelijk. Deze snelheden kunnen ontbonden worden in een radiële component langs onze gezichtslijn en een tangentiële component loodrecht daarop.  $\alpha$  is de hoek tussen  $v(R)$  en de gezichtslijn.

We gaan kijken naar de radiële snelheid die we meten langs een gezichtslijn in de richting gegeven door de Galactische lengte  $l$ .

- f) Laat zien dat de radiële snelheid  $v_r$  voor een ster/ wolk in de richting  $l$  op afstand  $R$  van het centrum van de Melkweg, gegeven wordt door

<sup>2</sup>Officieel is de definitie voor  $l = 0$  niet precies de gezichtslijn naar het Galactisch Centrum! Rond 1950 werd het nulpunt voor galactische lengte vastgesteld met behulp van de coördinaten van het Galactisch Centrum door de Internationale Astronomische Unie. De coördinaten van het Galactisch Centrum konden in die tijd echter nog niet heel nauwkeurig vastgesteld worden. Om verwarring te voorkomen werd  $l = 0$  gedefinieerd als de halve cirkel door de galactische noordpool die **precies** een hoek van  $123^\circ 00' 00,00''$  maakt met de cirkel door de galactische en equatoriale noordpool. De gezichtslijn naar het Galactisch Centrum ligt bijna op deze cirkel. We gebruiken nog steeds deze definitie voor het nulpunt van galactische lengte.



Figuur 5: Situatieschets van de waarneming van sterren binnen onze Melkweg.



$$\begin{aligned}
v_r(l, R) &= R_0 \sin(l) \left( \frac{v(R)}{R} - \frac{v_0}{R_0} \right) \\
&= R_0 \sin(l) (\Omega(R) - \Omega_0)
\end{aligned} \tag{15}$$

waar  $v_0 = 220$  km/s de rotatiesnelheid in de zonsomgeving is,  $v(R)$  de rotatiesnelheid in de omgeving van de ster/ wolk is en  $R_0$  de afstand van de Zon tot het Galactisch Centrum is.  $\Omega(R)$  en  $\Omega_0$  zijn de corresponderende hoeksnelheden.

**Oplossing** De radiële snelheid  $v_r$  is de snelheid die de ster heeft ten opzichte van de Zon in de richting van onze gezichtslijn naar de ster en is het verschil tussen de snelheid van de ster in deze richting met de snelheid van de Zon in deze richting (zie figuur 5):

$$v_r(l, R) = v_{r,*} - v_{r,\odot} \tag{16}$$

We kunnen  $v_r$  bijvoorbeeld meten met de Dopplershift.  $v_{r,*}$  en  $v_{r,\odot}$  kunnen uitgedrukt worden in termen van  $v(R)$ ,  $v_0$ ,  $\alpha$  en  $l$  met behulp van trigonometrie:

$$v_r(l, R) = v(R) \cos(\alpha) - v_0 \sin(l) \tag{17}$$

In formule 15 wordt  $\alpha$  o.a. uitgedrukt in termen van  $l$ . De sinusregel geeft de mogelijkheid om  $\cos(\alpha)$  te herschrijven:

$$\frac{\sin(l)}{R} = \frac{\sin(90^\circ + \alpha)}{R_0}$$

$\sin(90^\circ + \alpha)$  is gelijk aan  $\cos(\alpha)$ , dus:

$$\cos(\alpha) = \frac{R_0}{R} \sin(l) \tag{18}$$

Formule 17 kunnen we nu combineren met formule 18:

$$\begin{aligned}
v_r(l, R) &= v(R) \frac{R_0}{R} \sin(l) - v_0 \sin(l) \\
&= R_0 \sin(l) \left( \frac{v(R)}{R} - \frac{v_0}{R_0} \right) \\
&= R_0 \sin(l) (\Omega(R) - \Omega_0)
\end{aligned} \tag{19}$$

g) Op welke afstand  $d$  van de Zon vind je de wolken/sterren met maximale snelheid langs de gezichtslijn met lengte  $l$ .

**Oplossing**  $v_r(l, R)$  is bij constante  $l$  maximaal wanneer  $\Omega(R)$  maximaal is.

$$\begin{aligned}
\Omega(R) &= \frac{v(R)}{R} \\
&\propto \begin{cases} \text{constant} & \text{voor } R \leq 2 \text{ kpc} \\ \frac{1}{R} & \text{voor } R > 2 \text{ kpc} \end{cases}
\end{aligned} \tag{20}$$

$\Omega(R)$  is een continue functie, dus maximaal bij minimale  $R$ . De minimale straal  $R_{min}$  tot een punt langs de gezichtslijn is

$$R_{min} = R_0 \sin(l) \tag{21}$$

De afstand  $d$  tot dit punt is

$$d = R_0 \cos(l) \tag{22}$$

- h) Op een Galactische lengte van  $l = 45^\circ$ , meten we dat een ster een radiële snelheid  $v_r = 30 \text{ km/s}$  heeft. Wat is de afstand  $R$  van deze ster tot het Galactisch centrum, en wat is zijn afstand  $d$  tot de Zon?<sup>3</sup>

**Oplossing** De minimale afstand van sterren op een Galactische lengte van  $l = 45^\circ$  tot het centrum van de Melkweg is  $R_{min} = R_0 \sin(l) = 8.5 \sin(45^\circ) \approx 6.0 \text{ kpc} > 2 \text{ kpc}$ , dus de rotatiesnelheid  $v(R) = 220 \text{ km s}^{-1}$  voor alle sterren op een Galactische lengte van  $l = 45^\circ$ . Verder is alles behalve  $R$  nu bekend in formule 15, dus deze kunnen we nu uitrekenen:

$$\begin{aligned}
 v_r &= R_0 \sin(l) \left( \frac{v(R)}{R} - \frac{v_0}{R_0} \right) \\
 \frac{v(R)}{R} &= \frac{v_r}{R_0 \sin(l)} + \frac{v_0}{R_0} \\
 &= \frac{v_r + v_0 \sin(l)}{R_0 \sin(l)} \\
 R &= R_0 \frac{v(R) \sin(l)}{v_r + v_0 \sin(l)} \\
 &= 8.5 \text{ kpc} \frac{220 \text{ km s}^{-1} \sin(45^\circ)}{30 \text{ km s}^{-1} + 220 \text{ km s}^{-1} \sin(45^\circ)} \\
 &= 8.5 \text{ kpc} \frac{155.6 \text{ km s}^{-1}}{185.6 \text{ km s}^{-1}} \\
 &= 7.1 \text{ kpc}
 \end{aligned}$$

De afstand  $d$  kunnen we nu uitrekenen met behulp van de cosinusregel:

$$R^2 = d^2 + R_0^2 - 2dR_0 \cos(l) \quad (23)$$

Breng alles naar de linkerkant en deel door  $R_0^2$  om een vierkantsvergelijking te krijgen in termen van  $\frac{d}{R_0}$ :

$$\left( \frac{d}{R_0} \right)^2 - 2 \cos(l) \left( \frac{d}{R_0} \right) + \left( 1 - \left( \frac{R}{R_0} \right)^2 \right) = 0$$

Gebruik vervolgens de abc-formule om deze vergelijking op te lossen:

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{R_0} &= \cos(l) \pm \sqrt{\cos^2(l) - \left( 1 - \left( \frac{R}{R_0} \right)^2 \right)} \\
 &= 0.26 \text{ of } 1.15 \\
 d &= 2.23 \text{ of } 9.79 \text{ kpc}
 \end{aligned} \quad (24)$$

We zien dat er twee oplossingen zijn. De gezichtslijn kruist de cirkelbaan op 7.1 kpc twee maal. De rotatiesnelheid is constant op cirkelbanen in dit model, en deze wordt op beide kruisingen langs dezelfde gezichtslijn en onder dezelfde hoek ontbonden om de radiële snelheid te verkrijgen, dus de radiële snelheden op de kruisingen zijn identiek. De tangentiële snelheden van beide kruisingen zijn tegengesteld, dus sterren op deze punten bewegen in tegengestelde richting aan onze hemel. Helaas staan ze te ver weg om de tangentiële snelheden te meten (dit kan slechts tot op enkele honderden lichtjaren), dus deze bieden geen uitsluitsel welk punt daadwerkelijk gemeten is.

Om toch een rotatiekromme te kunnen bepalen met behulp van metingen op goed gedefinieerde punten maken we gebruik van onze bevinding bij vraag 2g). In verschillende gezichtslijnen meten we de maximale radiële snelheid. Formule 21 geeft de afstand  $R$  van het centrum van de Melkweg

<sup>3</sup>Neem aan dat de afstand van de Zon tot het Melkweg Centrum gelijk is aan  $R_0 = 8.5 \text{ kpc}$ .

tot het punt met deze snelheid voor elke gezichtslijn, en met behulp van formule 15 leiden we  $v(R)$  af.

Deze methode werkt alleen met redelijke nauwkeurigheid als we niet te rechtstreeks naar het Galactisch Centrum kijken, of niet te veel in onze eigen bewegingsrichting. In het eerste geval is onze aanname van ongeveer cirkelvormige banen niet meer geldig. Bovendien is de doorsnede van onze gezichtslijn met deze binnencirkels veel kleiner, en wordt de breedte van het radiële snelheidsprofiel vergelijkbaar met de intrinsieke thermische profielbreedte, zodat de positiebepaling te onzeker wordt. In het tweede geval kruist onze gezichtslijn de cirkelbaan nauwelijks en is de maximale radiële snelheid bijna gelijk is aan de radiële snelheden van de kruisingen, zodat de maximale radiële snelheid moeilijk te bepalen is.

De methode werkt bovendien alleen zolang we naar de binnencirkel van de Zon kijken, dus op  $l < 90^\circ$  en  $l > 270^\circ$ . Langs een gezichtslijn richting het Galactisch Centrum neemt de afstand tot het centrum eerst af en vervolgens toe, zodat wij inderdaad een maximale radiële snelheid kunnen waarnemen. Maar als wij de andere kant op kijken neemt de afstand tot het centrum continu af en dus ook de radiële snelheid. We kunnen daardoor niet vaststellen wat de rotatiesnelheid is op een specifiek punt buiten de zonsirkel met deze methode. Daarvoor kunnen we gebruik maken van optische afstands- en snelheidsbepalingen van bijvoorbeeld heldere emissienevels; onze resultaten tot en met  $R_0$  extrapoleren naar buiten toe; dynamische computermodellen maken; of de dynamica van andere sterrenstelsels bestuderen en vergelijken met de dynamica van onze eigen Melkweg.

- i) Uitgaande van bovenstaande rotatiekromme, bereken de radiële snelheid van sterren die op een afstand  $d = 1, 5$  en  $10$  kpc van de Zon staan, langs gezichtslijnen van  $l = 10^\circ$  en  $l = 25^\circ$  en  $l = 40^\circ$ . **Oplossing** In formule 15 voor de radiële snelheid zijn  $v_0$ ,  $R_0$  en  $l$  direct gegeven.  $R$  kunnen we uitrekenen m.b.v. de cosinusregel (formule 23), en  $v(R)$  wordt dan gegeven door de rotatiekromme, gerepresenteerd door formule 8. De gevraagde waarden voor  $v_r$  en de tussenwaarden voor  $R$  en  $v(R)$  worden dan (als je alleen de waarden voor  $(d, l) = (1, 10), (5, 25)$  en  $(10, 40)$  uit hebt gerekend is dit ook goed):

$d$ (kpc)	$l$ ( $^\circ$ )	$R$ (kpc)	$v(R)$ (km s $^{-1}$ )	$v_r$ (km s $^{-1}$ )
1	10	7.5	220	5.0
1	25	7.6	220	10.9
1	40	7.8	220	13.5
5	10	3.7	220	50.0
5	25	4.5	220	82.8
5	40	5.7	220	70.6
10	10	2.2	220	109.5
10	25	4.3	220	92.4
10	40	6.5	220	44.0

- j) Laat zien dat de tangentiële snelheid voor een ster/wolk in een richting  $l$  op afstand  $R$  van het centrum van de Melkweg, gegeven wordt door

$$v_t(l, R) = \pm \left( R_0 \cos(l) \left( \frac{v(R)}{R} - \frac{v_0}{R_0} \right) - \frac{v(R)}{R} d \right) \quad (25)$$

met  $d$  de afstand van de ster/wolk tot de Zon, waarbij het plusteken geldt voor het kruispunt van onze gezichtslijn met de cirkelbaan op straal  $R (< R_0)$  op de kleinste afstand van de Zon, en het minteken voor het kruispunt op de grootste afstand.

**Oplossing** De tangentiële snelheid  $v_t$  is de snelheid die de ster heeft loodrecht op onze gezichtslijn naar de ster. Net zoals bij de radiële snelheid moeten we de snelheid van de ster corrigeren voor de snelheid van de Zon, zodat we de effectieve snelheid berekenen die wij ook observeren. De tangentiële snelheid kunnen we bepalen door de beweging van de ster aan de hemel in boogseconden, oftewel de eigenbeweging (proper motion), te meten en deze met behulp van een afstandsschatting om te rekenen in een werkelijke snelheid.

De radiële snelheden van de omgeving van de Zon en een ander volume in de Melkweg zijn altijd gericht in dezelfde richting en moeten dus van elkaar af getrokken worden voor de effectieve snelheid.

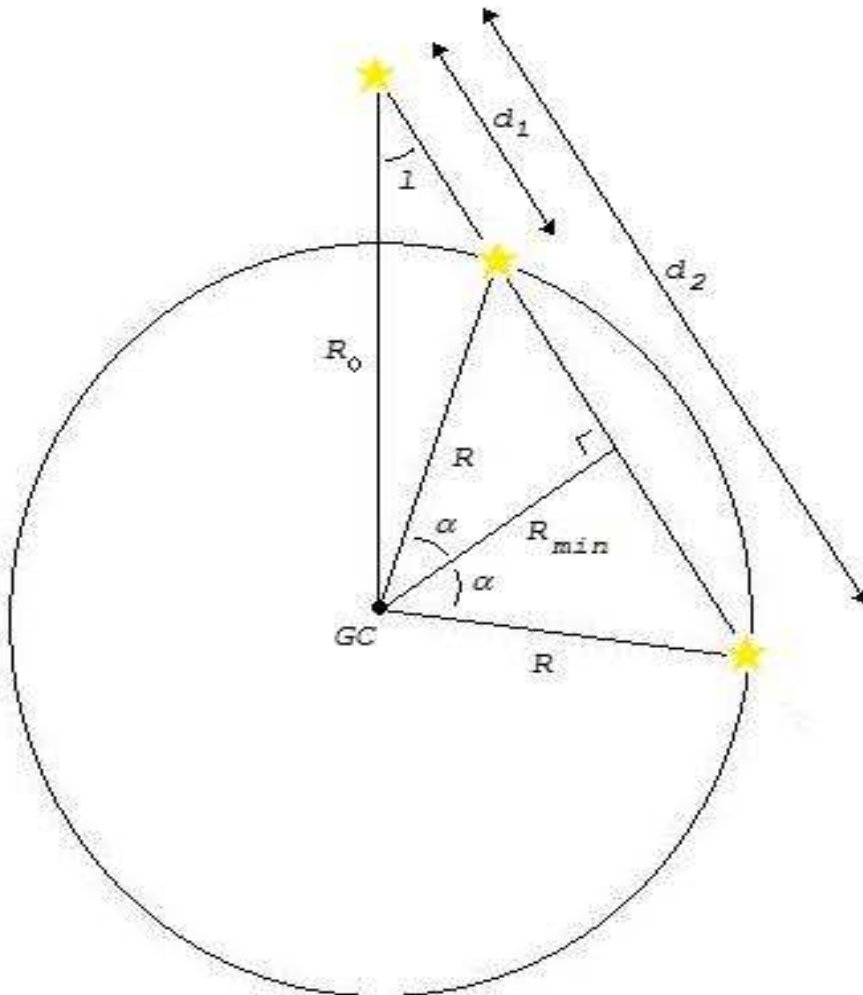
De tangentiële snelheden voor het kruispunt in figuur 5 moeten om dezelfde reden ook van elkaar afgetrokken worden. Maar als we de gezichtslijn in figuur 5 doortrekken om nogmaals te laten kruisen met de cirkelbaan op straal  $R$ , en de rotatiesnelheid op deze kruising weer ontbinden in een radiële en tangentiële snelheid, zien we dat de tangentiële snelheid van de ster hier tegengesteld is aan de tangentiële snelheid van de Zon. Dat betekent dat de tangentiële snelheden elkaar niet opheffen, maar versterken, en dus opgeteld moeten worden:

$$v_t(l, R) = v_{t,*} \mp v_{t,\odot} \quad (26)$$

waarbij het bovenste (min)teken geldt voor het punt op de kleinste afstand van de Zon en het onderste (plus)teken geldt voor het punt op de grootste afstand. Hierbij beschouwen we alleen cirkelbanen binnen de zonschijf.

Formule 26 kunnen we verder uitschrijven m.b.v. trigonometrie:

$$v_t(l, R) = v(R) \sin(\alpha) \mp v_0 \cos(l) \quad (27)$$



Figuur 6: De gezichtslijn kruist de cirkelbaan op straal  $R$  twee maal.

In formule 25 wordt  $\alpha$  weer uitgedrukt in termen van  $l$ . De  $\cos(\alpha)$  in  $v_r$  konden we onafhankelijk van  $d$  herschrijven, en is gelijk voor beide kruisingen (ga na).  $\sin(\alpha)$  kunnen we natuurlijk ook

onafhankelijk van  $d$  herschrijven, maar voor de uiteindelijke afleiding van de Oort Constante(n) (zie vraag 21)) is het makkelijker om  $\sin(\alpha)$  in termen van  $d$ ,  $R_0$ ,  $R$  en  $l$  te schrijven. Beschouw daarvoor figuur 6. De twee afstanden tot de kruisingen zijn:

$$d = R_0 \cos(l) \mp R \sin(\alpha) \quad (28)$$

Dus:

$$R \sin(\alpha) = \pm(R_0 \cos(l) - d) \quad (29)$$

waarbij het bovenste teken blijft gelden voor de kruising op de kleinste afstand van de Zon.

Nu kunnen we formule 27 met formule 29 combineren:

$$\begin{aligned} v_t(l, R) &= v(R) \sin(\alpha) \mp v_0 \cos(l) \\ &= \pm v(R) \frac{R_0 \cos(l) - d}{R} \mp v_0 \cos(l) \\ &= \pm \left( R_0 \cos(l) \left( \frac{v(R)}{R} - \frac{v_0}{R_0} \right) - \frac{v(R)}{R} d \right) \end{aligned} \quad (30)$$

- k) Bereken voor dezelfde gevallen ( $l = 45^\circ$ ,  $v_r = 30$  km/s) ook de eigenbeweging  $\theta_t$  (dwz. de beweging loodrecht op de gezichtslijn, over de hemel) van de gaswolken en druk deze uit in boogseconden per jaar:

$$\theta_t = \frac{v_t(l, R)}{d} \quad (31)$$

**Oplossing** Formule 13.7 uit Kutner berekent de eigenbeweging in de gevraagde eenheid:

$$\theta_t = \frac{v_t(l, R)}{4.74d} \quad (32)$$

met  $v_t$  in  $\text{km s}^{-1}$ ,  $d$  in pc en  $\theta_t$  in  $\text{arcsec yr}^{-1}$ .

$d$  hebben we in 2h) uitgerekend:  $d = 2.23$  of  $9.79$  kpc.

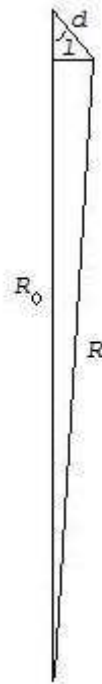
$v_t$  kunnen we berekenen met formule 25. Ook  $R$  en  $v(R)$  hebben we in 2h) bepaald:  $R = 7.1$  kpc en  $v(R) = v_0 = 220$   $\text{km s}^{-1}$ . Dan kun je alle waarden in principe direct invullen voor  $v_t$ , maar moet je wel goed op de eenheden letten. Je kunt het jezelf nog iets makkelijker maken door  $v_0$  buiten haakjes te halen, zodat  $v(R)$  tegen  $v_0$  wegvalt en overal breuken komen te staan van gelijke grootheden:

$$\begin{aligned} v_t(l, R) &= \pm v_0 \left( R_0 \cos(l) \left( \frac{v(R)}{v_0} \frac{1}{R} - \frac{1}{R_0} \right) - \frac{v(R)}{v_0} \frac{d}{R} \right) \\ &= \pm v_0 \left( R_0 \cos(l) \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{R_0} \right) - \frac{d}{R} \right) \\ &= \pm v_0 \left( \cos(l) \left( \frac{R_0}{R} - 1 \right) - \frac{d}{R} \right) \\ &= \begin{cases} -38.4 \text{ km s}^{-1} & \text{voor } d = 2.23 \text{ kpc} \\ 272.7 \text{ km s}^{-1} & \text{voor } d = 9.79 \text{ kpc} \end{cases} \end{aligned}$$

Nu kunnen we de corresponderende eigenbewegingen berekenen met formule 32:

$$\theta_t = \begin{cases} -0.0036 \text{ arcsec yr}^{-1} & \text{voor } d = 2.23 \text{ kpc} \\ 0.0059 \text{ arcsec yr}^{-1} & \text{voor } d = 9.79 \text{ kpc} \end{cases}$$

Deze zijn met de huidige technologie en telescopen net te klein om waargenomen te kunnen worden. De beste resolutie van de grootste telescopen is momenteel 0.01 - 0.1 arcsec. De telescopen van de Gaia missie van de European Space Agency (ESA), waarvan de lancering gepland staat in 2012, zullen deze proper motions hopelijk wel kunnen waarnemen. De resolutie van de Gaia telescopen zal voor sterren tot een magnitude van 10  $7 \mu\text{as}$  zijn (1 mas = 1 milliarcseconde =  $10^{-3}$  arcseconde,  $1 \mu\text{as} = 1$  microarcseconde =  $10^{-6}$  arcseconde). Dat is equivalent aan het meten van de diameter van een haar op 1000 km afstand! De resolutie is afhankelijk van de helderheid van de ster, maar zal tot een magnitude van 20 nog steeds  $300 \mu\text{as}$  zijn. Merk wel op dat de eigenbewegingen in arcseconden per jaar gegeven worden. We zouden dus een paar jaar kunnen wachten om deze kleine eigenbewegingen te meten. Maar gegeven de huidige resolutielimiet zou een dergelijke meting nog steeds niet heel nauwkeurig zijn.



Figuur 7: Als  $d \ll R_0$  is  $R_0 - R \approx d \cos l$ .

Laten we nu naar een iets realistischer situatie gaan kijken, waarbij we niet te maken hebben met een vlakke rotatiecurve  $v(R)$  in de omgeving van de Zon, maar met een  $v(R)$  die afneemt naarmate we naar buiten bewegen. Laten we ons beperken tot het waarnemen van sterren in onze directe zonsomgeving, en dus tot sterren/wolken die een afstand  $d \ll R_0$  hebben tot het centrum van de Melkweg. Dan is in goede benadering (zie figuur 7):

$$R_0 - R \approx d \cos l \quad (33)$$

terwijl we de hoeksnelheid  $\Omega(R)$  van deze objecten kunnen benaderen door een eerste orde Taylor expansie,

$$\Omega(R) - \Omega_0 \approx \left( \frac{d\Omega}{dR} \right)_{R_0} (R - R_0) \quad (34)$$

- 1) Leidt uit de vergelijking voor de radiële snelheid (eqn. 15) af dat deze in de zonsomgeving voor een ster op galactische lengte  $l$  en afstand  $d$  gegeven wordt door:

$$v_r(l) = A d \sin 2l, \quad (35)$$

waarbij  $A$  de beroemde **Oort Constante**  $A$  is, genoemd naar de vermaarde Nederlandse sterrenkundige Jan Hendrik Oort (1900-1992),

$$A = \frac{1}{2} \left[ \frac{v_0}{R_0} - \left( \frac{dv(R)}{dR} \right)_{R_0} \right]. \quad (36)$$

**Oplossing** We werken eerst de afgeleide in formule 34 uit:

$$\begin{aligned} \left( \frac{d\Omega}{dR} \right)_{R_0} &= \left( \frac{d}{dR} \frac{v(R)}{R} \right)_{R_0} \\ &= \left( \frac{1}{R} \frac{dv(R)}{dR} - \frac{v(R)}{R^2} \right)_{R_0} \\ &= \frac{1}{R_0} \frac{dv(R)}{dR} \Big|_{R_0} - \frac{v_0}{R_0^2} \end{aligned} \quad (37)$$

Nu kunnen we  $v_r$  uitschrijven:

$$\begin{aligned} v_r(l, R) &= R_0 \sin(l) (\Omega(R) - \Omega_0) \\ &= R_0 \sin(l) \left( \frac{1}{R_0} \frac{dv(R)}{dR} \Big|_{R_0} - \frac{v_0}{R_0^2} \right) (R - R_0) \\ &= -d \cos(l) R_0 \sin(l) \left( \frac{1}{R_0} \frac{dv(R)}{dR} \Big|_{R_0} - \frac{v_0}{R_0^2} \right) \\ &= d \cos(l) \sin(l) \left( \frac{v_0}{R_0} - \frac{dv(R)}{dR} \Big|_{R_0} \right) \end{aligned}$$

Nu maken we gebruik van de trigonometrische identiteit  $\sin(2\alpha) = 2 \sin(\alpha) \cos(\alpha)$  en gebruiken we de definitie van de Oort Constante  $A$ :

$$\begin{aligned} v_r(l, R) &= \frac{1}{2} d \sin(2l) \left( \frac{v_0}{R_0} - \frac{dv(R)}{dR} \Big|_{R_0} \right) \\ &= Ad \sin(2l) \end{aligned} \quad (38)$$

$v_t$  kan ook herschreven worden in termen van Oort Constanten:

$$v_t(l, R) = d(A \cos(2l) + B) \quad (39)$$

waarin  $B$  de **Oort Constante**  $B$  is,

$$B = -\frac{1}{2} \left[ \frac{v_0}{R_0} + \left( \frac{dv(R)}{dR} \right)_{R_0} \right]. \quad (40)$$

$A$  en  $B$  zijn lokale dynamische parameters.  $A$  beschrijft hoe een volume-element vervormt door de differentiële rotatie van de Melkweg en  $B$  beschrijft hoe het volume-element draait rond een punt. Voor de omgeving van de Zon geldt dat  $A \approx 14.82 \pm 0.84 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$  en  $B \approx -12.37 \pm 0.64 \text{ kms}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$ .

### Opgave 3: Logaritmische Spiraal

We kunnen de spiraalstructuur van sterrenstelsels benaderen door een logaritmische spiraal. Hierin parametrizeer je de straal  $r(\theta)$  als functie van de hoek  $\theta$  door middel van de uitdrukking

$$r(\theta) = a e^{b\theta} \quad (41)$$

waarin  $a$  en  $b$  de twee parameters zijn die de grootte en windingsdichtheid van de spiraal bepalen. Merk op dat voor  $\theta > 0$  de spiraal na  $\theta = 2\pi$  blijft doorlopen en dat voor  $\theta < 0$  de spiraal naar de oorsprong convergeert. In termen van de coördinaten  $x(\theta)$  en  $y(\theta)$ ,

$$\begin{aligned} x(\theta) &= a e^{b\theta} \cos \theta \\ y(\theta) &= a e^{b\theta} \sin \theta \end{aligned} \quad (42)$$

De parameter  $b$  is gerelateerd aan de hellingshoek  $\beta$  van de spiraal. De hellingshoek  $\beta$  is de hoek tussen de spiraal en de cirkel met straal  $r(\theta)$  op elk punt op de spiraal (m.a.w. de hellingshoek is een constante). De hellingshoek is:

$$\beta = 90.0 - \arctan \frac{1}{b}. \quad (43)$$

- a) Teken de logaritmische spiraal voor twee gevallen, voor hellingshoeken  $\beta = 10^\circ$  en  $\beta = 40^\circ$ . Neem  $a = 1$  in beide gevallen. Doe dit voor in totaal 4 windingen per spiraal, dus voor  $\theta = [0, 8\pi]$ .

**Oplossing** Bereken eerst voor beide gevallen de parameter  $b$ :

$$b = \frac{1}{\tan(\pi/2 - \beta)} \quad (44)$$

waar  $\beta$  nu de hellingshoek in radialen is:  $\beta_{rad} = \frac{\pi}{180^\circ} \beta_{grad}$ . (Je kunt  $\beta$  ook in graden laten staan, als je maar een tangens functie gebruikt die een argument in graden aanneemt.) Bereken vervolgens voor een aantal punten in  $\theta = [0, 8\pi]$  de waarde van  $e^{b\theta}$  en plot de spiraal (zie vergelijking 42).

In plaats van een heleboel punten met de hand uit te rekenen kun je ook een computerprogramma schrijven om de spiraal te plotten. Dit is een programmavoorbeeld in Matlab waarmee figuren 8 en 9 gemaakt zijn:

```
function logspiral(a, beta)
% Plot the logarithmic spiral with multiplication
% constant a and pitch angle beta in degrees for
% theta = [0, 8 * pi]

close all

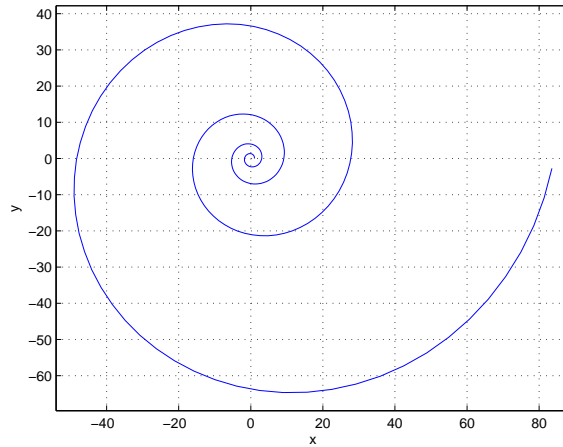
beta_rad = pi / 180 * beta; % beta in radians
b = 1 / (tan(pi / 2 - beta_rad)); % winding parameter b

theta = 0 : 0.1 : 8 * pi;

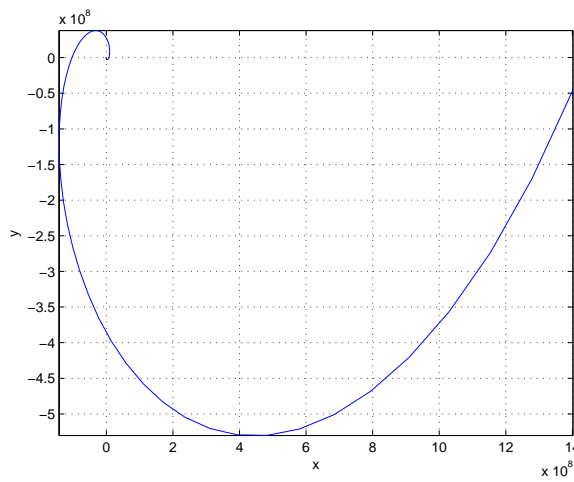
x = a .* exp(b .* theta) .* cos(theta);
y = a .* exp(b .* theta) .* sin(theta);

figure(1)
plot(x, y)
axis([min(x) - 5, max(x) + 5, min(y) - 5, max(y) + 5])
xlabel('x')
ylabel('y')
grid on
```





Figuur 8: Logaritmische spiraal voor  $\beta = 10^\circ$ .



Figuur 9: Logaritmische spiraal voor  $\beta = 40^\circ$ .

De Melkweg heeft verschillende spiraalarmen, welke bij benadering logaritmische spiralen zijn met een hellingshoek van ongeveer  $12^\circ$ . In het algemeen hebben armen van spiraalstelsels hellingshoeken tussen de  $10^\circ$  en  $40^\circ$ .

#### Opgave 4: Karakteristieken van sterrenstelsels

Van een zevental melkwegstelsels gaan we een aantal eigenschappen bepalen. De onderstaande tabel geeft een aantal gemeten grootheden weer. Deze zijn achtereenvolgens de naam van het stelsel, de afstand  $d$ , de radiële snelheid  $v_r$ , de schijnbare magnitude in de B-band  $m_B$ , de extinctie in de B-band  $A_B$  (van de galactische voorgrond), de  $B - V$  kleur, de diameter  $a$  in boogminuten en de waargenomen HI profielbreedte  $\Delta v_{obs}$ .

Stelsel	$d$ (Mpc)	$v_r$ (km/s)	$m_B$ (mag)	$A_B$ (mag)	$B - V$ (mag)	$a$ (')	$\Delta v_{obs}$ (km/s)
NGC1156	7.8	375	12.32	1.15	0.58	3.3 x 2.5	112
NGC2403	3.3	131	8.93	0.67	0.47	21.9 x 12.3	242
NGC2841	18.0	638	10.9	0.52	0.87	8.1 x 3.5	607
NGC3351	10.1	778	10.53	0.45	0.80	7.4 x 5.0	281
NGC3379	11.5	911	10.24	0.12	0.96	5.4 x 4.8	-
NGC4621	14.8	410	10.57	0.15	0.94	5.4 x 3.7	-
NGC5112	19.1	965	12.6	0.37	0.46	4.0 x 2.8	221

Tabel 1: Gemeten grootheden voor 7 verschillende stelsels.

Bepaal de volgende eigenschappen van deze stelsels:

- a) Het Hubble type (verklaar je antwoord).

**Oplossing** De voornaamste kenmerken waar je op moet letten bij het classificeren van een stelsel als een specifiek Hubble type zijn eventuele spiraalarmen, ellipticiteit, eventuele balken in het centrum en irregulariteit. Het onderscheid tussen mate van ellipticiteit en strakheid van de windingen zoals in figuur 17.1 van Kutner is aangegeven is vaak een discussiepunt waar zelfs deskundigen het niet eens over kunnen worden. Het is zelfs zo dat meestal een soort gemiddelde wordt genomen van de uiteenlopende meningen... Als je het leuk vindt om je mening mee te laten tellen, kijk dan eens op Galaxy Zoo (<http://www.galaxyzoo.org>), een online sterrenkunde project dat de mening van vrijwilligers gebruikt om sterrenstelsels te classificeren. Bij 'How To Take Part' krijg je een interactieve classificatie tutorial. Zie tabel 2 voor mogelijke classificaties bij deze stelsels.

Stelsel	Hubble type
NGC1156	Irr, want geen duidelijke armstructuur te herkennen.
NGC2403	Sc, want spiraalstelsel zonder balk met diffuse armen.
NGC2841	Sb, want spiraalstelsel zonder balk met veel armen
NGC3351	SBb, want spiraalstelsel met duidelijke balk en gemiddeld gewonden armen.
NGC3379	E1, want nagenoeg ronde elliptical.
NGC4621	E5, want duidelijk elliptisch, maar niet extreem uitgerekt.
NGC5112	SBC, want spiraalstelsel met duidelijke balk maar diffuse armen.

Tabel 2: Oplossingen bij 4a).

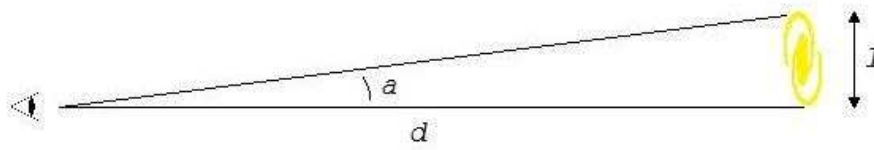
- b) De diameters  $d$  in kpc en de inclinatie  $i$  in graden.

**Oplossing** Figuur 10 is een schets van de situatie waarin wij een stelsel op een afstand  $d$  zien. De geprojecteerde diameter aan de hemel wordt gemeten met een hoek  $a$ , en de werkelijke diameter is  $l$ . We zien dat

$$\tan(a) = \frac{l}{d}$$

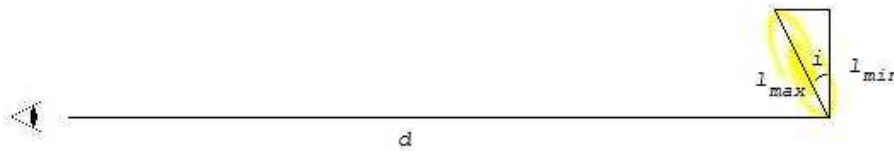
In de benadering dat  $d \gg l$ , dus dat  $a$  een kleine hoek is, is  $\tan(a) \approx a$ , dus:

$$l \approx ad \tag{45}$$



Figuur 10: Waarneming van de diameter  $l$  van een sterrenstelsel op afstand  $d$ .

De hoek waaronder het stelsel staat noemen we de inclinatie van het stelsel. Als wij een stelsel van bovenaf zien, dus als we de volledige cirkel zien, is de inclinatie van het stelsel  $0^\circ$ . De meeste stelsels staan echter onder een andere hoek ten opzichte van onze gezichtslijn, en hebben dus een inclinatie tussen de  $0^\circ$  en  $90^\circ$ . Een stelsel met een inclinatie van  $90^\circ$  zien we precies op de rand.



Figuur 11: De kleinste diameter  $l_{min}$  is een projectie van de werkelijke diameter  $l_{max}$ .

Als we aannemen dat een stelsel cirkelvormig is en we de 2 geprojecteerde diameters op ons gezichtsvlak meten, kunnen we ook de inclinatie van het stelsel berekenen. Figuur 11 is een doorsnede van de situatie waarin wij een stelsel met een inclinatie  $i$  zien. De schuine lijn is de werkelijke diameter van het stelsel en dus de grootste diameter  $l_{max}$ . De rechte lijn is de projectie van het stelsel op het gezichtsvlak, en is de kleinste diameter  $l_{min}$  van de waargenomen ellips. De verhouding tussen de inclinatie en de maximale en minimale waargenomen diameter is dus:

$$\cos(i) = \frac{l_{min}}{l_{max}} \quad (46)$$

Je zou ook de verhouding tussen de hoeken  $a_{min}$  en  $a_{max}$  kunnen nemen, aangezien deze lineair schalen met  $l_{min}$  en  $l_{max}$ . Zie tabel 3 voor de oplossingen.

Stelsel	$l$ (kpc)	$i$ ( $^\circ$ )
NGC1156	7.5 x 5.7	40.7
NGC2403	21.0 x 11.8	55.8
NGC2841	42.4 x 18.3	64.4
NGC3351	21.7 x 14.7	47.5
NGC3379	18.1 x 16.1	27.3
NGC4621	23.2 x 15.9	46.7
NGC5112	22.2 x 15.6	45.6

Tabel 3: Oplossingen bij 4b).

- c) De absolute magnitude  $M_B$  en de totale helderheid  $L_B$  uitgedrukt in zonshelderheden  $L_\odot$ . De absolute magnitude van de Zon in B is 5.5 mag.

**Oplossing** Merk op dat de extinctie oftewel lichtabsorptie door gas en stof tussen ons en het stelsel ook in tabel 1 staat. Paragraaf 14.2 in Kutner legt meer uit over extinctie. Deze heeft invloed

op de waargenomen magnitude van het stelsel. Met behulp van formule 14.4 in Kutner vind je de absolute magnitude  $M_B$ :

$$M_B = m_B - 5 \log \left( \frac{d}{10 \text{ pc}} \right) - A_B \quad (47)$$

en met behulp van formule 2.2 in Kutner vind je de totale helderheid  $L_B$ :

$$\frac{L_B}{L_\odot} = 10^{\frac{M_\odot - M_B}{2.5}} \quad (48)$$

Stelsel	$M_B$ (mag)	$L_B$ ( $L_\odot$ )
NGC1156	-18.3	$3.28 \times 10^9$
NGC2403	-19.3	$8.57 \times 10^9$
NGC2841	-20.9	$3.62 \times 10^{10}$
NGC3351	-19.9	$1.50 \times 10^{10}$
NGC3379	-20.2	$1.88 \times 10^{10}$
NGC4621	-20.4	$2.36 \times 10^{10}$
NGC5112	-19.2	$7.41 \times 10^9$

Tabel 4: Oplossingen bij 4c).

Zie tabel 4 voor de gevonden waarden. Zoals verwacht zouden de stelsels zeer helder zijn en dus een zeer lage magnitude hebben als ze op een afstand van slechts 10 pc zouden staan. Een gemiddeld sterrenstelsel heeft zo'n  $10^{11}$  sterren, en als we aannemen dat zij voor het meeste licht zorgen en 1 ster gemiddeld ongeveer zo helder is als de Zon, zijn ook de gevonden helderheden heel aannemelijk.

- d) De gemiddelde oppervlaktehelderheid  $m_{sq}$  in magnituden per vierkante boogseconde (mag/arcsec<sup>2</sup>). **Oplossing** Magnitude kan niet zomaar gedeeld worden door de totale oppervlakte, omdat magnitude niet een lineaire grootte is. Beschouw in plaats daarvan 1 vierkante boogseconde als een aparte objectje, en gebruik de gebruikelijke formule voor de verhouding tussen de helderheden van 2 objecten:

$$\frac{b_1}{b_2} = 10^{\frac{m_2 - m_1}{2.5}}$$

De verhouding van de helderheid van het hele stelsel  $b_{tot}$  tot de helderheid van 1 vierkante boogseconde  $b_{sq}$  is (gemiddeld) gelijk aan de verhouding van de oppervlakte van het hele stelsel  $O_{tot}$  tot de oppervlakte van 1 vierkante boogseconde  $O_{sq}$ :

$$\begin{aligned} \frac{b_{tot}}{b_{sq}} &= \frac{O_{tot}}{O_{sq}} \\ &= \frac{\pi a_{min} a_{max}}{\text{arcsec}^2} \end{aligned}$$

(De oppervlakte van een ellips =  $\pi \times$  diameter langste as  $\times$  diameter kleinste as.) De oppervlaktehelderheid  $m_{sq}$  wordt dan:

$$m_{sq} = m_B - A_B + 2.5 \log \left( \frac{\pi a_{min} a_{max}}{\text{arcsec}^2} \right) \quad (49)$$

waarbij we de schijnbare magnitude nog corrigeren voor de extinctie. Je zou het ook met de absolute magnitude kunnen doen, dan moet je de grootte van het stelsel nog corrigeren naar de grootte die het op 10 pc zou hebben. Maar je komt op hetzelfde getal uit, omdat zowel de oppervlakte als de helderheid omgekeerd evenredig zijn met de afstand in het kwadraat, dus de

Stelsel	$m_{sq}$ (mag/arcsec <sup>2</sup> )
NGC1156	23.6
NGC2403	24.5
NGC2841	24.1
NGC3351	24.1
NGC3379	23.8
NGC4621	23.8
NGC5112	25.0

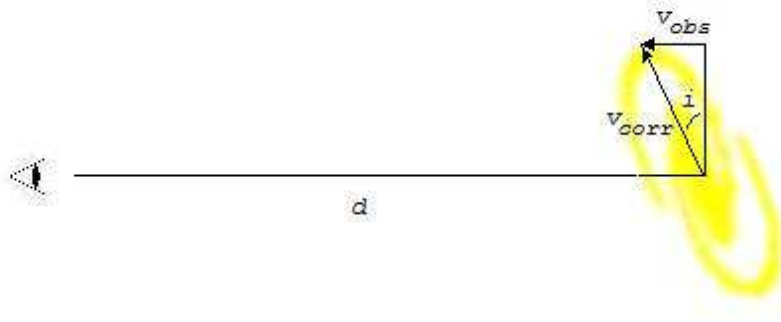
Tabel 5: Oplossingen bij 4d).

oppervlaktehelderheid is constant. Feitelijk is dit behoud van energie. Zie tabel 5 voor de gevonden oppervlaktehelderheden.

De gevonden waarden zijn gemiddeld over het gehele stelsel. Het centrum van sterrenstelsels is echter helderder, gemiddeld ongeveer 19 - 23 mag/arcsec<sup>2</sup> en de randen zijn zwakker, ongeveer 23 - 26 mag/arcsec<sup>2</sup>. Gegeven dat de hemelachtergrond een gemiddelde oppervlaktehelderheid heeft van 25 mag/arcsec<sup>2</sup> betekent dit dat de stelsels bijna volledig wegvallen tegen de achtergrond, en alleen het centrum goed zichtbaar is. Anders zou de hemel niet zo donker zijn als hij nu is!

- e) De gecorrigeerde snelheidsbreedtes  $\Delta v_{corr}$  in de oriëntatie van de stelsels die een HI waarneming hebben. Plot deze stelsels in een Tully-Fisher diagram. Is dit een redelijk resultaat?

**Oplossing**



Figuur 12: De waargenomen snelheidsbreedte moet gecorrigeerd worden voor de inclinatie.

De snelheidsbreedtes zijn Dopplershifts, dus we meten snelheidsverschillen  $v_{obs}$  in de radiale richting. De werkelijke draaisnelheid  $v_{corr}$  van het stelsel is echter in de eigen orientatierichting en is dus als volgt gecorreleerd met de inclinatie (zie figuur 12):

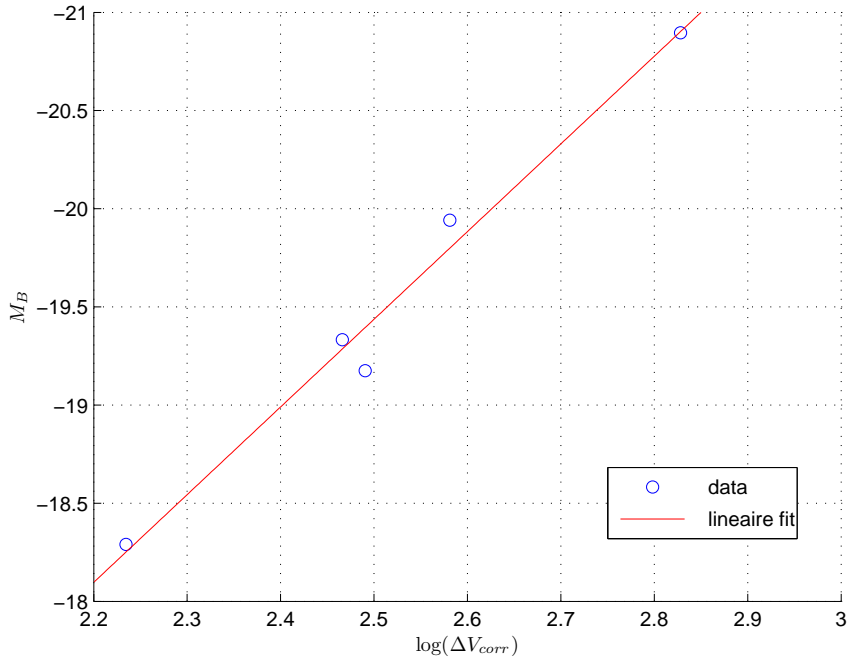
$$\sin(i) = \frac{v_{obs}}{v_{corr}} \quad (50)$$

Zie tabel 6 voor de gevonden waarden.

In het Tully-Fisher diagram plotten we vervolgens de absolute magnitude van de stelsels tegen de gecorrigeerde snelheidsbreedtes (logaritmisch), zie figuur 13. We zien inderdaad een rechte lijn in het logaritmische plot, en  $M \propto 2.5 \log L$ , dus  $L \propto v^\alpha$ , met  $\alpha$  de helling in het logaritmische plot gedeeld door 2.5. We vinden hier een waarde voor  $\alpha$  van  $(\Delta M / \Delta(\log(\Delta v))) / 2.5 \approx 1.8$ . De waarde van  $\alpha$  verschilt voor verschillende spectrale banden en wordt momenteel ongeveer geschat op 2.8 in

Stelsel	$\Delta v_{corr}$ (km s <sup>-1</sup> )
NGC1156	172
NGC2403	292
NGC2841	673
NGC3351	381
NGC3379	-
NGC4621	-
NGC5112	309

Tabel 6: Oplossingen bij 4e).



Figuur 13: Tully-Fisher diagram bij 4e).

de B-band en maximaal 4 in het infrarood. De relatie is sterker in het infrarood, omdat infrarood licht niet gehinderd wordt door stof zoals licht in de B-band. We vinden een afwijkende waarde voor  $\alpha$  met deze gegevens omdat de afstandsbepalingen niet goed zijn (zie ook de toelichting bij vraag 4f)) en omdat we maar een klein sample hebben.

- f) Plot de radiële snelheid van de stelsels tegen hun afstand. Bespreek of hierin de Hubble wet is te herkennen en als dit niet het geval is, waarom niet.

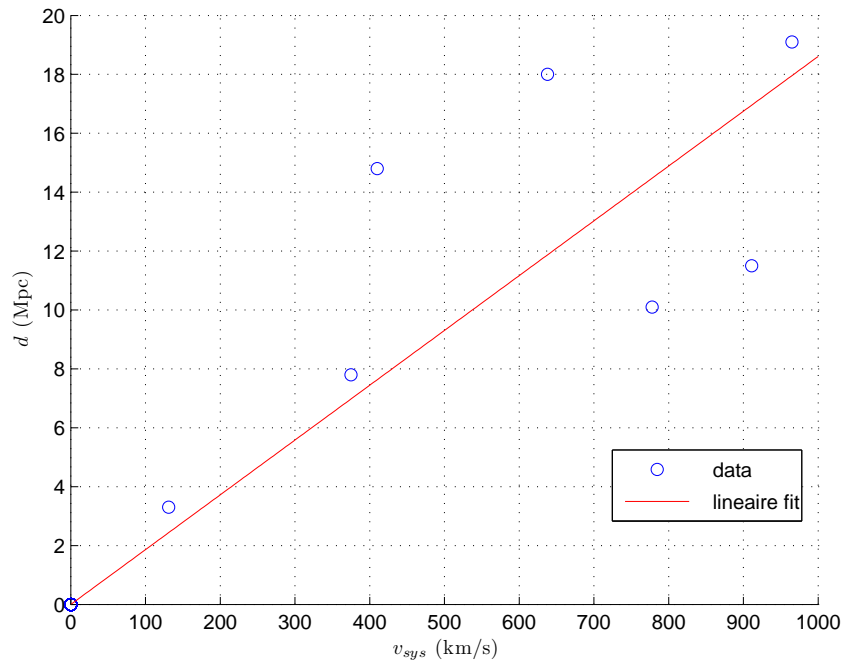
**Oplossing** De afstand  $d$  en de radiële snelheid  $v_r$  staan direct in tabel 1 en kunnen we rechtstreeks plotten, zie figuur 14.

In principe herkennen we de wet van Hubble:

$$v = H_0 d \quad (51)$$

aangezien de afstand inderdaad lineair lijkt tot te nemen met de radiële snelheid. Maar de waarde van de Hubble constante die wij in deze grafiek aflezen is ongeveer 54 km/s/Mpc in plaats van de meest recente waarde van  $72 \pm 4$  km/s/Mpc.

Wij vinden hier een afwijkende waarde omdat de gegevens voor de afstand en de systematische snelheid die wij hier hebben gebruikt oudere waarden zijn en niet goed gecorrigeerd zijn. Ten



Figuur 14: Hubble diagram bij 4f).

eerste was de absolute helderheid van de veranderlijke Cepheïden lange tijd niet goed bepaald omdat we afstanden in de lokale Melkweg niet goed bepaald hadden. Dit was pas mogelijk nadat de satelliet Hipparcos hier nauwkeurige metingen aan gedaan had. Nog belangrijker was het feit dat we geen goede kaart hadden van de stofverdeling in onze Melkweg waardoor we niet goed de helderheid van sterren zoals de Cepheïden konden corrigeren voor extinctie. Dit was één van de belangrijkste redenen voor de controverse tussen de astronomen Sandage en de Vaucouleurs, die maar liefst een factor 2 verschilden in hun bepaling van de Hubble constante. Bovendien bevinden alle sterrenstelsels in de tabel zich in het lokale heelal, de verste niet veel verder dan de Virgo cluster. Dit betekent dat er ook sprake is van substantiële peculiare snelheden door lokale kosmische stromen, waarvoor het zeer moeilijk is te corrigeren in de bepaalde roodverschuiving, zodat de radiële snelheden van deze stelsels niet representatief zijn voor de uitdijing van het hele heelal.