

# Symmetrie in islamitische ornamentale kunst

Jan van de Craats (UvA, OU)

Wie in Andalusië de moorse paleizen en moskeeën, zoals het Alhambra in Granada, het Alcazar in Sevilla of de grote Mezquita-moskee in Cordoba bezoekt, wordt onmiddellijk getroffen door de verfijnde ornamenten en versieringen. Niet alleen daar, maar ook in de gehele arabische wereld is zulke ornamentale kunst overvloedig aanwezig: sierlijk gecalligrafeerde arabische teksten, rijkelijk bewerkte plafonds en mozaïekvloeren en intrigerende veelkleurige wandversieringen in de vorm van regelmatige patronen.

Wat bij die vlakvullingen vooral opvalt is de schier eindeloze variatie in de keuze van de motieven en de kleuren. Maar ook de aard van de symmetrieën vertoont allerlei variaties. Je ziet vierkanten, zeshoeken, stervormige achthoeken, twaalfhoeken, zestienhoeken en allerlei andere motieven die kunstig ineen gevlochten zijn en zich tot aan de randen toe steeds weer blijven herhalen. Sommige motieven zijn spiegelsymmetrisch, andere vertonen draaiingssymmetrie.

Als je zulke patronen met wiskundige ogen bekijkt, zie je abstracte onderliggende structuren van symmetrietransformaties. Zoals bij alle abstracties, doe je daarmee de werkelijkheid geweld aan: je dringt de specifieke vormen van de motieven in het patroon naar de achtergrond, en concentreert je op de rotaties en spiegelingen die het patroon als geheel in zichzelf overvoeren. Wanneer de motieven van een patroon zich in een of meer richtingen herhalen, zal de wiskundige het patroon in gedachten onbeperkt periodiek voortzetten, ook al is het in werkelijkheid begrensd. We denken ons in dat die begrenzing een soort 'venster' vormt waarachter het patroon zich onbeperkt voortzet. In dat geval heeft dat onbegrensd patroon ook translaties als symmetrieën.

Neem bijvoorbeeld het patroon van Figuur 1. We zien een samenstel van gebogen driepuntige sterren binnen een rechthoekige begrenzing. Wanneer we dat patroon in gedachten naar alle kanten onbeperkt voortzetten, zijn er tal van translaties die het patroon in zichzelf overvoeren. Maar ook onder een rotatie over 120 graden rond het middelpunt van zo'n ster gaat het patroon als geheel in zichzelf over. Er zijn verder rotaties over 180 graden en rotaties over 60 graden die het patroon in zichzelf overvoeren. Zulke translaties en rotaties noemen we *symmetrieën* van het patroon. Ze brengen een *groep* voort, de



Figuur 1: Een patroon uit het Alcazar in Sevilla.

*symmetriegroep* van het patroon.

Tijdens de voordracht zullen we veel voorbeelden van islamitische patronen gebruiken. In deze syllabustekst concentreren we ons op de wiskundige achtergronden; we geven slechts een beperkt aantal illustraties. Deze tekst kan natuurlijk ook als leidraad dienen bij de analyse van decoratieve patronen uit andere culturen. Zoals al eerder gezegd: de wiskundige, groepentheoretische analyse leert ons alleen iets over de onderliggende structuur, en niets over de specifieke motieven, het kleurgebruik en tal van andere artistiek belangrijke zaken. Bovendien zal blijken dat kleine veranderingen in het patroon de symmetriegroep radikaal kunnen veranderen, terwijl er artistiek gezien nauwelijks iets gewijzigd wordt. Zo kunnen bijvoorbeeld kleine verstoringen alle spiegelsymmetrieën verwijderen.

Met al dit voorbehoud moet toch vastgesteld worden dat het determineren van symmetriegroepen een uitermate boeiende en stimulerende bezigheid kan zijn. We hopen ons enthousiasme hiervoor op de deelnemers van de Vacantiecursus te kunnen overbrengen, en via hen ook op grote groepen scholieren.

## Symmetriegroepen

We maken eerst enige terminologie-afspraken. Bij een gegeven figuur  $F$  in het vlak (zo'n figuur kan van alles zijn: een al dan niet begrensd vlakdeel, een stel punten, een al dan niet begrensd patroon) noemt men een isometrie  $\mathcal{I}$  van het vlak een *symmetrie van  $F$*  als  $\mathcal{I}(F) = F$ . Onder een isometrie van het vlak verstaat men daarbij een afbeelding van het vlak op zichzelf die afstanden van puntenparen niet verandert. Voorbeelden van isometrieën zijn lijnspiegelingen, rotaties, translaties en glijspiegelingen (een glijspiegeling is een spiegeling in een lijn gevolgd door een translatie langs die lijn). In de Appendix op

de bladzijden 12 e.v. laten we zien dat *elke* isometrie van een van deze vier gedaanten is. In het vervolg zullen we herhaaldelijk gebruik maken van de resultaten die in de Appendix vermeld staan, sommige in de vorm van een stelling, andere in de vorm van een opgave.

De symmetrieën van  $F$  vormen een groep, de symmetriegroep  $\mathbf{S}(F)$  van  $F$ . Voor elke figuur  $F$  geldt:

1. De identieke afbeelding (*id*) is bevat in  $\mathbf{S}(F)$ .
2. Als  $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2 \in \mathbf{S}(F)$  dan ook  $\mathcal{I}_2\mathcal{I}_1 \in \mathbf{S}(F)$ . Let er hierbij op dat we het product  $\mathcal{I}_2\mathcal{I}_1$  *van rechts naar links* lezen, dus eerst  $\mathcal{I}_1$  en dan  $\mathcal{I}_2$ .
3. Als  $\mathcal{I} \in \mathbf{S}(F)$  dan ook  $\mathcal{I}^{-1} \in \mathbf{S}(F)$ .

We geven drie voorbeelden:

1.  $F$  is een cirkel met middelpunt  $M$ .  $\mathbf{S}(F)$  bestaat dan uit alle rotaties met centrum  $M$  en alle spiegelingen in lijnen door  $M$ .
2.  $F$  is een vierkant met middelpunt  $M$ .  $\mathbf{S}(F)$  bestaat dan uit de rotaties met centrum  $M$  over hoeken van  $\frac{1}{2}k\pi$  (met  $k = 0, 1, 2, 3$ ) en de spiegelingen in de beide diagonalen en de beide verbindingslijnen van de middens van diametrale zijden.
3.  $F$  is de grafiek van de functie  $f(x) = \sin x$ .  $\mathbf{S}(F)$  bevat dan onder andere alle horizontale translaties over gehele veelvouden van  $2\pi$ , en verder zekere spiegelingen in verticale lijnen, puntspiegelingen en glijspiegelingen met de  $x$ -as als glijspiegelas.

Het eerste voorbeeld bevat in zekere zin 'te veel' symmetrie: we zullen in het vervolg slechts figuren bekijken met een *discrete* symmetriegroep, dat wil zeggen dat er bij elk punt  $P$  in het vlak een omgeving van  $P$  is die buiten  $P$  zelf geen beelden van  $P$  onder isometrieën uit de symmetriegroep bevat. De voorbeelden 2 en 3 zijn discreet.

Bevat een discrete symmetriegroep niet-triviale translaties (dat wil zeggen translaties met een positieve translatieafstand), dan is er in elke translaterichting een translatie  $\mathcal{T}$  met een *minimale positieve* translatieafstand. Elke translatie in die richting is dan te schrijven als  $\mathcal{T}^n$  voor zekere gehele  $n$ . Zijn er translaties in minstens twee verschillende richtingen, dan zijn er altijd twee translaties  $\mathcal{T}_1$  en  $\mathcal{T}_2$  te vinden zo, dat elke translatie uit de symmetriegroep van de vorm  $\mathcal{T}_1^n\mathcal{T}_2^m$  is voor zekere gehele waarden van  $n$  en  $m$ .

Bevat een discrete symmetriegroep niet-triviale rotaties (dat wil zeggen rotaties die niet de identieke afbeelding zijn) met een centrum  $M$ , dan is er een rotatie  $\mathcal{R}$  met centrum  $M$  en *minimale positieve* rotatiehoek. Die hoek moet gelijk zijn

aan  $\frac{2\pi}{n}$  voor zekere positieve gehele  $n$ . De rotaties in de symmetriegroep met centrum  $M$  zijn dan  $\mathcal{R}^k$  met  $k = 0, \dots, n - 1$ . Men noemt  $M$  in dit geval een  $n$ -voudig rotatiecentrum, of, kortweg, een  $n$ -centrum.

Als  $M$  een  $n$ -centrum is en  $\mathcal{I}$  is een willekeurige symmetrie uit de symmetriegroep, dan is  $\mathcal{I}(M)$  ook een  $n$ -centrum.

## Rozetpatronen

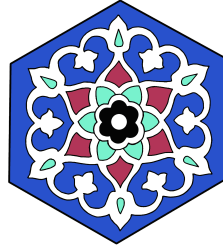
In deze sectie onderzoeken we patronen waarvan de symmetriegroep discreet is en geen niet-triviale translaties bevat. Zo'n patroon zullen we een *rozetpatroon* noemen om redenen die zo dadelijk duidelijk worden. Er kunnen in zo'n groep geen glijspiegelingen voorkomen, want het kwadraat van een glijspiegeling is een translatie. Zo'n groep kan dus alleen maar bestaan uit rotaties en lijnspiegelingen.

Als er meer dan één lijnspiegeling in de symmetriegroep voorkomt, moeten alle spiegellijnen door één punt gaan, want anders zijn er ook weer translaties (als er twee evenwijdige spiegellijnen zijn) of glijspiegelingen (als er drie assen zijn die niet door één punt gaan en niet onderling evenwijdig zijn). Noem het snijpunt van alle spiegellijnen  $O$ . Omdat de groep discreet is, kunnen er maar eindig veel assen zijn. Als het er  $n$  zijn, moeten ze opvolgend gelijke hoeken van  $\frac{\pi}{n}$  met elkaar maken. Noemen we één spiegellijn  $m_0$  dan ontstaan de andere assen  $m_1$  tot en met  $m_{n-1}$  uit  $m_0$  door rotatie om  $O$  over een hoek  $\frac{k\pi}{n}$  ( $k = 1, \dots, n - 1$ ). De bijbehorende lijnspiegelingen noemen we  $\mathcal{S}_0, \dots, \mathcal{S}_{n-1}$ .

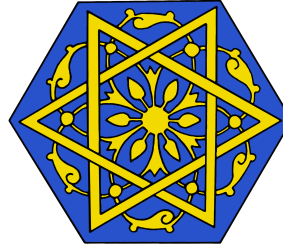
Het product  $\mathcal{R}_k = \mathcal{S}_k \mathcal{S}_0$  is een rotatie met centrum  $O$  en rotatiehoek  $\frac{2k\pi}{n}$ . De groep bevat dus naast de  $n$  lijnspiegelingen ook nog  $n$  rotaties om  $O$  (inclusief de identiteit ( $id$ )). Het is een eenvoudige opgave om te bewijzen dat de symmetriegroep verder geen andere symmetrieën kan bevatten. Het gaat hier dus om een groep met  $2n$  elementen die de *dihedrale groep*  $\mathbf{D}_n$  genoemd wordt. Voor  $n \geq 3$  is dit de symmetriegroep van een regelmatige  $n$ -hoek.

De  $n$  rotaties in  $\mathbf{D}_n$  vormen een ondergroep van index 2, de zogenaamde *cyclische groep*  $\mathbf{C}_n$ . Patronen met als symmetriegroep een dihedrale groep of een cyclische groep noemt men wel *rozetpatronen*. Ze zijn er voor elke  $n \geq 1$ , en andere eindige symmetriegroepen zijn er niet. In Figuur 2 staan voorbeelden van rozetten met symmetriegroep  $\mathbf{D}_6$  en  $\mathbf{C}_6$ .

Een rozet met symmetriegroep  $D_6$ .



Een rozet met symmetriegroep  $C_6$ .



Figuur 2: Turkse Rozetpatronen.

## Strookpatronen

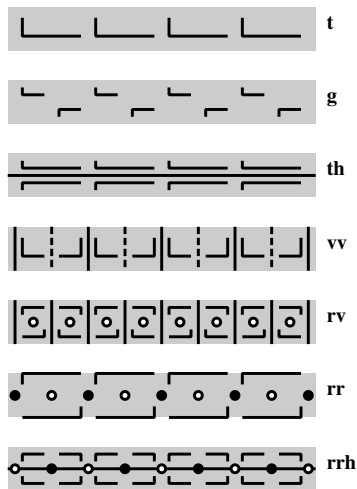
We bekijken nu patronen waarvan de symmetriegroep discreet is en translaties in slechts één richting bevat. Zulke patronen noemen we *strookpatronen*. We nemen die richting horizontaal. Er moet dan een translatie zijn met een minimale positieve translatieafstand (want de groep is discreet). Stel dat dit  $T$  is, en dat  $d > 0$  de translatieafstand is. Elke andere translatie is van de vorm  $T^n$  voor zekere gehele  $n$ .

Als de symmetriegroep niet-triviale rotaties bevat, kan de rotatiehoek van zo'n rotatie alleen maar  $\pi$  zijn. Er zijn dus alleen maar 2-centra (indien aanwezig). Bovendien moeten al die centra op één horizontale lijn liggen, want de opeenvolging van zulke rotaties in twee verschillende centra is een translatie over de dubbele afstand van die centra. De afstand tussen twee rotatiecentra is dus een geheel veelvoud van  $\frac{1}{2}d$ .

Als de symmetriegroep van een strookpatroon spiegelingen bevat, moet de spiegelas horizontaal of verticaal zijn. Er kan hoogstens één horizontale spiegelas zijn. Verticale spiegellijnen hebben een onderlinge afstand die een geheel veelvoud is van  $\frac{1}{2}d$ .

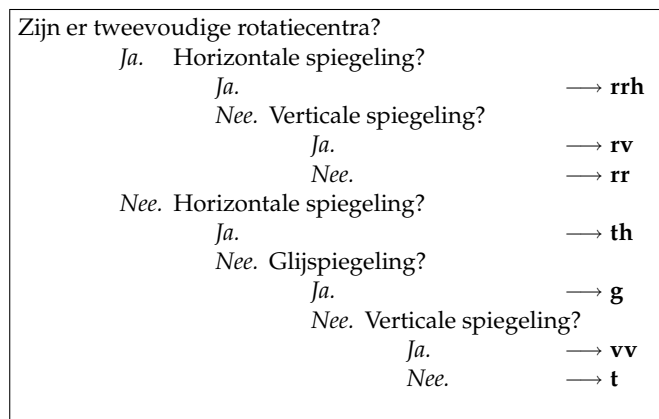
Als de symmetriegroep van een strookpatroon glijspiegelingen bevat, moet de spiegelas horizontaal zijn want het kwadraat van een glijspiegeling is een translatie. De translatieafstand van de translatiecomponent in een glijspiegeling is een geheel veelvoud van  $\frac{1}{2}d$ .

In Figuur 3 zijn de zeven mogelijke symmetriegroepen van strookpatronen in beeld gebracht aan de hand van eenvoudige voorbeelden. De breedte van het getoonde stuk is telkens  $4d$ . De hier gehanteerde namen van de groepen zijn ontleend aan karakteristieke isometrieën of combinaties ervan. In  $t$  zijn er alleen maar translaties. De groep  $g$  wordt voortgebracht door een glijspiegeling. In de groep  $th$  zitten translaties en een horizontale spiegeling. In de groep  $vv$  zijn er verticale spiegelingen in twee verschillende soorten assen. In  $rv$  vinden



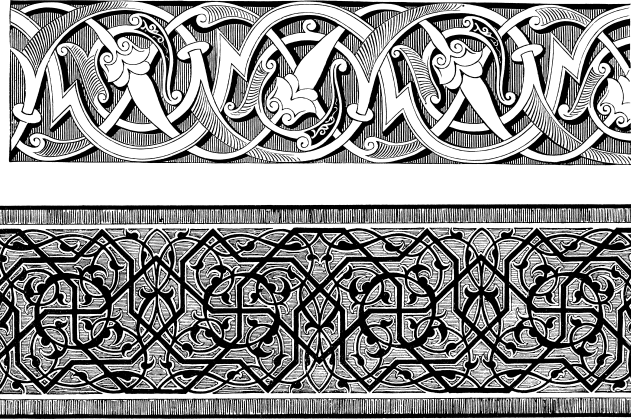
Figuur 3: De zeven strookpatronen.

we rotaties en spiegelingen in verticale assen die niet door een rotatiecentrum gaan. In **rr** zijn er twee soorten rotatiecentra, aangegeven door witte en zwarte punten, en in **rrh** worden die ook nog gecombineerd met een horizontale spiegeling. Aan de hand van het schema van Figuur 4 kun je de symmetriegroep bij elk strookpatroon gemakkelijk determineren.



Figuur 4: Determinatieschema voor strookpatronen.

In Figuur 5 zien we twee voorbeelden van arabische strookpatronen. De bijbehorende symmetriegroepen zijn **g** en **rv**.



Figuur 5: Twee arabische strookpatronen.

## Behangpatronen

Wanneer de symmetriegroep van een patroon discreet is en translaties in minstens twee verschillende richtingen bevat, spreekt men over een *behangpatroon* (Engels: *wallpaper pattern*) omdat veel patronen op behangpapier deze eigenschap hebben. De symmetriegroep van zo'n patroon noemen we een behangpatroongroep.

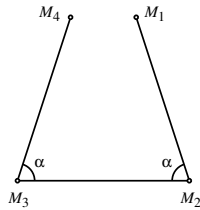
De kristallograaf E.S. Fedorov bewees in 1891 dat er precies 17 verschillende behangpatroongroepen zijn. Omdat zijn artikel in het Russisch geschreven was, bleef het lang onbekend. Zijn resultaat werd in 1924 herontdekt door G. Pólya en P. Niggli. In de moorse paleizen in Andalusië en op andere plaatsen in de arabische wereld kan men alle 17 groepen gerealiseerd zien in schitterende wanddecoraties. Wij zullen hier een overzicht van die 17 groepen geven en een stroomschema waarmee zo'n patroon kan worden gedetermineerd. De notaties die we voor de verschillende groepen zullen gebruiken, zijn ontleend aan de *International Tables for X-ray Crystallography*.

### De kristallografische beperking

De classificatie van de behangpatroongroepen wordt vereenvoudigd door gebruik te maken van de volgende stelling, die bekend staat als de kristallografische beperking.

*Stelling (kristallografische beperking):* In een behangpatroon kunnen alleen maar  $n$ -centra voorkomen met  $n = 2$ ,  $n = 3$ ,  $n = 4$  of  $n = 6$ .

*Bewijs:* Stel  $M_1$  is een  $n$ -centrum. Noem  $\alpha = \frac{2\pi}{n}$ . Elke isometrie  $\mathcal{I}$  uit de symmetriegroep die  $M_1$  niet invariant laat, voert  $M_1$  over in een ander  $n$ -centrum. Omdat de groep discreet is, is er een  $n$ -centrum  $M_2$  met minimale positieve afstand tot  $M_1$ . De rotatie  $\mathcal{R}$  met centrum  $M_2$  en rotatiehoek  $\alpha$  voert  $M_1$  over in  $M_3$ . Evenzo voert de rotatie  $\mathcal{R}'$  met centrum  $M_3$  en rotatiehoek  $\alpha$  het punt  $M_2$  over in een punt  $M_4$ . Omdat  $M_1$  en  $M_2$   $n$ -centra zijn, zijn  $M_3$  en  $M_4$  het ook.



Figuur 6: Bij het bewijs van de kristallografische beperking.

Als  $n = 6$  vallen  $M_1$  en  $M_4$  samen. Als  $n > 6$  ligt  $M_3$  dichterbij  $M_1$  dan  $M_2$  en als  $n = 5$  ligt  $M_4$  dichterbij  $M_1$  dan  $M_2$  (zie Figuur 6). In deze beide gevallen ontstaat dus een tegenspraak, waarmee de stelling bewezen is.  $\square$

We zullen zien dat 2-centra, 3-centra, 4-centra en 6-centra inderdaad allemaal in behangpatronen kunnen voorkomen.

## Het determinatieschema

Bij het determineren van de symmetriegroep van een behangpatroon kijken we eerst naar de *maximale* waarde van  $n$  waarvoor er  $n$ -centra in het patroon voorkomen. Op grond van de kristallografische restrictie kan  $n$  alleen de waarden 2, 3, 4 en 6 aannemen. Als er in zo'n patroon geen rotaties voorkomen, stellen we  $n = 1$ . We hebben dus vijf hoofdcategorieën:  $n = 1$ ,  $n = 2$ ,  $n = 3$ ,  $n = 4$  en  $n = 6$ . Door vervolgens telkens ja/nee vragen te stellen, komen we uiteindelijk tot de determinatie van de symmetriegroep via het schema van bladzijde 9. De eerste ja/nee vraag zal telkens zijn of er een lijnspiegeling in de groep aanwezig is.

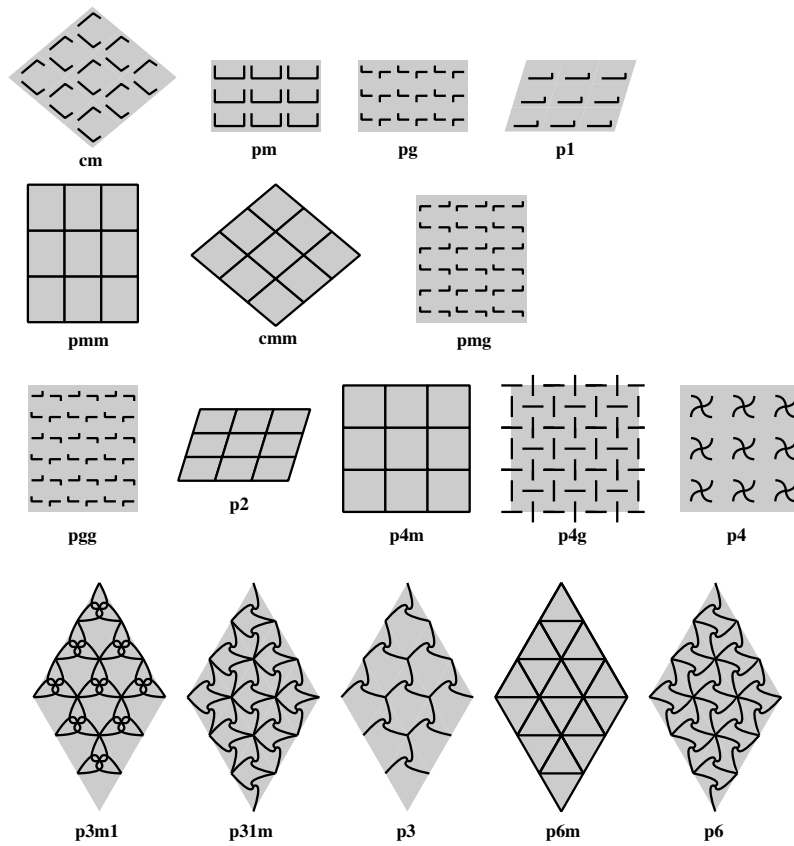
Zoals uit Figuur 8 op bladzijde 10 blijkt, kunnen we bij elk van de 17 behangpatroongroepen voorbeelden van zo'n patroon vinden. Samen met het determinatieschema toont dit eigenlijk slechts aan dat er *minstens* 17 verschillende groepen zijn. Het is denkbaar dat er bij sommige eindpunten van de beslissingsboom van het schema twee of meer verschillende groepen horen, en dat er dus een nog fijnere verdeling nodig is. Men kan echter aantonen dat dit niet het geval is.



Stel  $n$  is de grootste waarde waarvoor er  $n$ -voudige rotatiecentra in het patroon voorkomen. Als er geen rotatiecentra zijn, nemen we  $n = 1$ .

$n = 1$ . Is er een lijnspiegeling?		
Ja.	Is er een glijspiegelas die geen spiegelas is?	
Ja.		→ <b>cm</b>
Nee.		→ <b>pm</b>
Nee.	Is er een glijspiegeling?	
Ja.		→ <b>pg</b>
Nee.		→ <b>p1</b>
$n = 2$ . Is er een lijnspiegeling?		
Ja.	Zijn er spiegellijnen in twee richtingen?	
Ja.	Liggen alle 2-centra op spiegellijnen?	
Ja.		→ <b>pmm</b>
Nee.		→ <b>cmm</b>
Nee.		→ <b>pmg</b>
Nee.	Is er een glijspiegeling?	
Ja.		→ <b>pgg</b>
Nee.		→ <b>p2</b>
$n = 3$ . Is er een lijnspiegeling?		
Ja.	Liggen alle 3-centra op spiegellijnen?	
Ja.		→ <b>p3m1</b>
Nee.		→ <b>p31m</b>
Nee.		→ <b>p3</b>
$n = 4$ . Is er een lijnspiegeling?		
Ja.	Zijn er spiegellijnen die elkaar onder een hoek van $45^\circ$ snijden?	
Ja.		→ <b>p4m</b>
Nee.		→ <b>p4g</b>
Nee.		→ <b>p4</b>
$n = 6$ . Is er een lijnspiegeling?		
Ja.		→ <b>p6m</b>
Nee.		→ <b>p6</b>

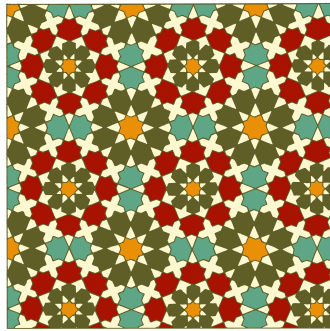
Figuur 7: Determinatieschema voor behangpatronen.



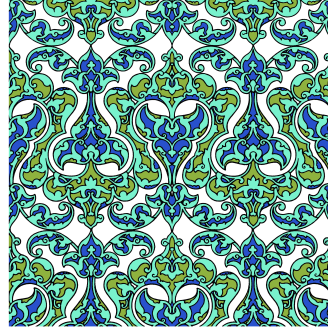
Figuur 8: De zeventien behangpatronen.

In Figuur 9 geven we vier voorbeelden van islamitische 'behangpatronen'. De bijbehorende symmetriegroepen zijn **p4m**, **pmg**, **p6** en **p3**.

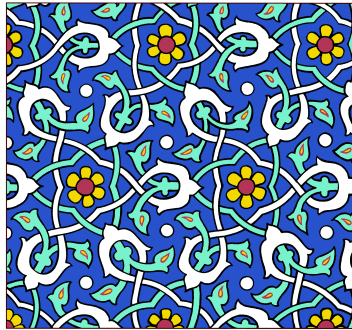
**p4m**



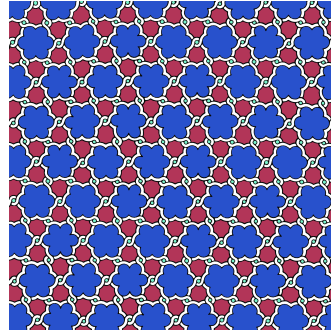
**pmg**



**p3**



**p6**



Figuur 9: Voorbeelden van islamitische patronen.

## Appendix: Coördinatenstelsels en isometrieën

Een vlak met punten en lijnen waarin voor elk tweetal punten  $P$  en  $Q$  een afstand  $d(P, Q)$  gedefinieerd is, heet een *euclidisch vlak* als er een bijjectie van dat vlak naar  $\mathbb{R}^2$  bestaat met de volgende eigenschappen:

1. Elke lijn correspondeert met een verzameling in  $\mathbb{R}^2$  van de vorm  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by = c\}$  waarin  $a$  en  $b$  niet beide nul zijn.
2. Voor elk tweetal punten  $P$  en  $Q$  met beelden  $(p_1, p_2)$  respectievelijk  $(q_1, q_2)$  in  $\mathbb{R}^2$  geldt dat  $d(P, Q) = \sqrt{(p_1 - q_1)^2 + (p_2 - q_2)^2}$ .

Zo'n bijjectie legt een *cartesisch coördinatenstelsel* vast. Het beeld  $(p_1, p_2)$  van een punt  $P$  onder die bijjectie noemt men het *coördinatenpaar* van  $P$ . Men schrijft, enigszins slordig,  $P = (p_1, p_2)$ . In deze tekst werken we uitsluitend in een euclidisch vlak. We zullen de woorden 'cartesisch' en 'euclidisch' dan vaak weglaten, en eenvoudig spreken over 'een coördinatenstelsel in het vlak' als we 'een cartesisch coördinatenstelsel in het euclidische vlak' bedoelen.

Zo'n coördinatenstelsel is niet uniek bepaald: bij elk drietal punten  $A$ ,  $B$  en  $C$  in het vlak die niet op één lijn liggen, is er een (wél uniek bepaald) coördinatenstelsel met de eigenschap dat  $A = (0, 0)$ ,  $B = (b, 0)$  met  $b > 0$  en  $C = (c_1, c_2)$  met  $c_2 > 0$ . In algemeen gangbaar taalgebruik:  $A$  is de oorsprong van het coördinatenstelsel,  $B$  ligt op de positieve  $x$ -as en  $C$  ligt in het bovenhalfvlak.

*Definitie:* Een *isometrie*  $\mathcal{I}$  is een afbeelding van het vlak op zichzelf die afstanden behoudt, dat wil zeggen dat voor elk tweetal punten  $A$  en  $B$  in het vlak geldt dat  $d(A, B) = d(\mathcal{I}(A), \mathcal{I}(B))$ .

*Lemma:* Als een isometrie  $\mathcal{I}$  twee verschillende punten  $A$  en  $B$  invariant laat, dat wil zeggen dat  $\mathcal{I}(A) = A$  en  $\mathcal{I}(B) = B$ , dan laat  $\mathcal{I}$  elk punt van de lijn door  $A$  en  $B$  invariant.

*Bewijs:* Kies een coördinatenstelsel zo, dat  $A = (0, 0)$  en  $B = (b, 0)$  met  $b > 0$  en stel dat  $C = (c, 0)$  een ander punt op de lijn door  $A$  en  $B$  is. Als  $\mathcal{I}(C) = (x, y)$  dan is  $d(A, C) = d(A, \mathcal{I}(C))$  dus

$$c^2 = x^2 + y^2$$

en  $d(B, C) = d(B, \mathcal{I}(C))$  dus

$$(c - b)^2 = (x - b)^2 + y^2.$$

Trekt men de tweede vergelijking van de eerste af, dan ontstaat na vereenvoudiging  $2bc = 2bx$ , dus  $c = x$  want  $b \neq 0$ . Substitutie hiervan in de eerste vergelijking geeft vervolgens  $y = 0$ , en dus is  $(x, y) = (c, 0)$ .  $\square$

*Stelling A.1:* Als een isometrie  $\mathcal{I}$  drie punten, niet op één lijn, invariant laat, is het de identieke afbeelding (*id*).

*Bewijs:* Stel  $A$ ,  $B$  en  $C$  zijn de gegeven invariante punten en  $P$  is een willekeurig ander punt. Als  $P$  op een van de lijnen  $AB$ ,  $BC$  of  $CA$  ligt, is  $P$  invariant op grond van het lemma. Indien  $P$  niet op een van die lijnen ligt, is er een lijn door  $P$  die twee van die lijnen in twee verschillende punten snijdt. Die punten zijn invariant op grond van het lemma, en  $P$  dus ook, opnieuw op grond van het lemma.  $\square$

*Stelling A.2:* Als een isometrie  $\mathcal{I} \neq (id)$  twee invariante punten  $A$  en  $B$  heeft, is het de spiegeling in de lijn  $AB$ .

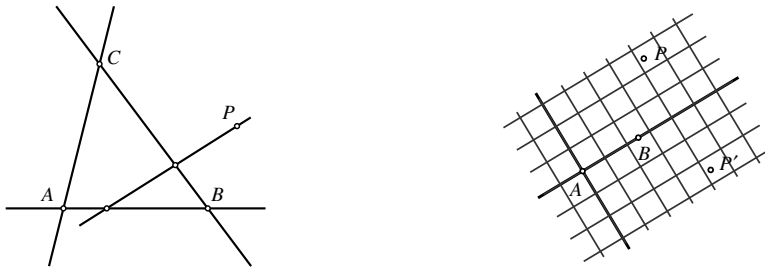
*Bewijs:* Kies een coördinatenstelsel zo, dat  $A = (0,0)$  en  $B = (b,0)$  met  $b > 0$ . Voor een punt  $P = (x,y)$  met  $y \neq 0$  en beeldpunt  $P' = \mathcal{I}(P) = (x',y')$  geldt dan  $d(A,P) = d(A,P')$  dus

$$x^2 + y^2 = (x')^2 + (y')^2$$

en  $d(B,P) = d(B,P')$  dus

$$(x - b)^2 + y^2 = (x' - b)^2 + (y')^2.$$

Aftrekken geeft  $2bx = 2bx'$  dus  $x = x'$  (want  $b \neq 0$ ) en substitutie hiervan in de eerste vergelijking geeft  $y = \pm y'$ . Zou  $y = y'$  zijn, dan zou  $\mathcal{I} = (id)$  op grond van Stelling A.1. Dit is uitgesloten, en dus is  $y = -y'$ . Dit betekent dat  $\mathcal{I}$  inderdaad de spiegeling in de  $x$ -as is, dat wil zeggen de spiegeling in de lijn  $AB$ .  $\square$

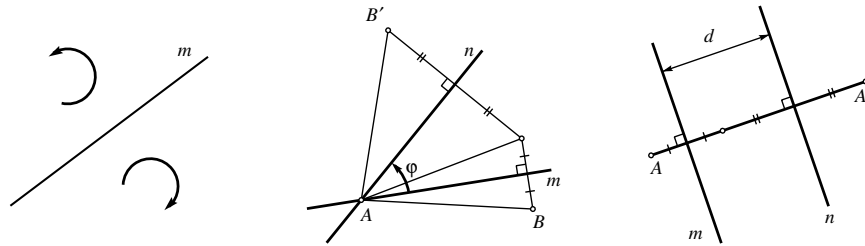


Figuur 10: Bij de bewijzen van Stelling A.1 (links) en Stelling A.2 (rechts).

## Eigenschappen van lijnspiegelingen

Bij elke lijn  $m$  in het vlak is er een uniek bepaalde lijnspiegeling  $S_m$ . Er geldt  $S_m^2 = (id)$ , met andere woorden, twee maal spiegelen in dezelfde lijn geeft hetzelfde resultaat als niets doen. Nog weer anders gezegd: een lijnspiegeling is zijn eigen inverse afbeelding, in formule  $S_m^{-1} = S_m$ .

Lijnspiegelingen keren de oriëntatie om: een linksom draaiende pijl wordt na een lijnspiegeling een rechtsom draaiende pijl en omgekeerd. (Zie Figuur 11, links.)



Figuur 11: Lijnspiegelingen als bouwstenen van rotaties en translaties.

Als  $m$  en  $n$  twee lijnen zijn die elkaar in een punt  $A$  snijden, en de hoek  $\varphi$ , met  $0 < \varphi < \pi$ , is de tegen de klok in gemeten hoek tussen  $m$  en  $n$ , dan is de isometrie  $S_n S_m$  (let op de volgorde: eerst  $S_m$  toepassen en dan  $S_n$ ) de *rotatie* met centrum  $A$  en rotatiehoek  $2\varphi$ . Voor elk punt  $B \neq A$  met  $B' = S_n S_m(B)$  geldt dan  $\angle BAB' = 2\varphi$ . (Zie Figuur 11, midden.)

Rotaties zijn oriëntatiebehoudend. Bij de ontbinding van een rotatie met centrum  $A$  in twee lijnspiegelingen in lijnen door  $A$ , kan één van de twee spiegellijnen vrij door  $A$  gekozen worden.

Een bijzondere rotatie is de *puntspiegeling*  $S_A$  in  $A$ . De rotatiehoek is dan  $\pi$ , en  $A$  is het midden van het lijnstuk  $BB'$  voor elk punt  $B$ . Er geldt dat  $S_A^2 = (id)$  dus een puntspiegeling is, net als een lijnspiegeling, zijn eigen inverse. Bij de ontbinding van een puntspiegeling in twee lijnspiegelingen zijn de twee spiegellijnen onderling loodrecht. Omdat een rotatie over  $\pi$  hetzelfde effect geeft als een rotatie over  $-\pi$ , maakt de volgorde waarin de beide lijnspiegelingen worden uitgevoerd, in dit geval niets uit: als  $m \perp n$  is  $S_m S_n = S_n S_m$ .

Als  $m$  en  $n$  twee evenwijdige lijnen zijn met een onderlinge afstand  $d > 0$ , dan is de isometrie  $S_n S_m$  (let weer op de volgorde: eerst  $S_m$  toepassen en dan  $S_n$ ) de *translatie* over een afstand  $2d$  in de richting loodrecht op  $m$  en  $n$ , gericht van  $m$  naar  $n$ . Voor elk punt  $A$  met beeld  $A' = S_n S_m(A)$  geldt dan dat de vector met beginpunt  $A$  en eindpunt  $A'$  lengte  $2d$  heeft en loodrecht staat op  $m$  en  $n$ . (Zie Figuur 11, rechts.)

Translaties zijn oriëntatiebehoudend. Bij de ontbinding van een translatie in twee lijnspiegelingen in evenwijdige lijnen, kan één van de twee spiegellijnen vrij gekozen worden, maar wel loodrecht op de translatierichting.

## Classificatie van isometrieën

*Stelling A.3:* Elke isometrie  $\mathcal{I}$  is te schrijven als het product van maximaal drie lijnspiegelingen.

*Bewijs:* We onderscheiden drie gevallen:

1.  $\mathcal{I}$  heeft minstens twee invariante punten  $A$  en  $B$ . Dan is  $\mathcal{I}$  de identiteit of de lijnspiegeling in  $AB$ .
2.  $\mathcal{I}$  heeft precies één invariant punt  $A$ . Neem een ander punt  $B$  met beeldpunt  $B' = \mathcal{I}(B)$ . De middelloodlijn  $m$  van  $B$  en  $B'$  gaat door  $A$  want  $d(A, B) = d(A, B')$ . De isometrie  $\mathcal{S}_m \mathcal{I}$  heeft dan de invariante punten  $A$  en  $B$ . Het kan niet de identiteit zijn, want dan zou  $\mathcal{I} = \mathcal{S}_m$  zijn, maar  $\mathcal{I}$  heeft slechts één invariant punt. Er geldt dus dat  $\mathcal{S}_m \mathcal{I} = \mathcal{S}_{AB}$ , dat wil zeggen dat  $\mathcal{I} = \mathcal{S}_m \mathcal{S}_{AB}$ . In dit geval is  $\mathcal{I}$  dus een *rotatie* met centrum  $A$ .
3.  $\mathcal{I}$  heeft geen invariante punten. Kies een willekeurig punt  $B$  met beeldpunt  $B' = \mathcal{I}(B)$ . Stel dat  $A$  het midden is van het lijnstuk  $BB'$  en dat  $\mathcal{S}_A$  de puntspiegeling in  $A$  is. De isometrie  $\mathcal{S}_A \mathcal{I}$  heeft dan  $B$  als invariant punt. Er zijn nu weer twee mogelijkheden:

(a.)  $\mathcal{S}_A \mathcal{I}$  is een rotatie met centrum  $B$ . Schrijf die rotatie als  $\mathcal{S}_{AB} \mathcal{S}_p$  voor zekere lijn  $p$  door  $B$  (zie Figuur 12, links). Dan geldt voor de lijn  $q$  door  $A$  loodrecht op  $AB$

$$\mathcal{I} = \mathcal{S}_A \mathcal{S}_{AB} \mathcal{S}_p = \mathcal{S}_q \mathcal{S}_{AB} \mathcal{S}_{AB} \mathcal{S}_p = \mathcal{S}_q \mathcal{S}_p.$$

Dit kan geen rotatie zijn, want  $\mathcal{I}$  heeft geen invariante punten, dus het is een translatie, met andere woorden,  $p$  en  $q$  zijn evenwijdig en staan loodrecht op de lijn  $AB$ .

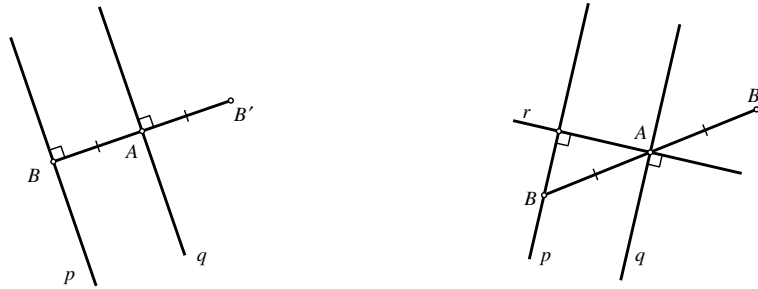
(b.)  $\mathcal{S}_A \mathcal{I}$  is een lijnspiegeling in een lijn  $p$  door  $B$ . Schrijf  $\mathcal{S}_A = \mathcal{S}_q \mathcal{S}_r$  met  $p \parallel q \perp r$  (zie Figuur 12, rechts). Dan is

$$\mathcal{I} = \mathcal{S}_A \mathcal{S}_p = \mathcal{S}_r \mathcal{S}_q \mathcal{S}_p = \mathcal{S}_q \mathcal{S}_r \mathcal{S}_p = \mathcal{S}_q \mathcal{S}_p \mathcal{S}_r$$

de *glijspiegeling* met *glijspiegelas*  $r$  en *translatiecomponent*  $\mathcal{S}_q \mathcal{S}_p$ . Net als de lijnspiegelingen keren de glijspiegelingen de oriëntatie om.  $\square$

In het bewijs van Stelling A.3 hebben we een volledig overzicht gekregen van alle mogelijke isometrieën van het vlak. De *oriëntatiebehoudende* isometrieën zijn de identiteit, de rotaties (waaronder de puntspiegelingen) en de translaties. De isometrieën die de *oriëntatie omkeren* zijn de lijnspiegelingen en de glijspiegelingen. Een glijspiegeling kan opgevat worden als een lijnspiegeling gevolgd door een translatie in de richting van de spiegelas. De volgorde kan daarbij ook worden omgekeerd: eerst de translatie en dan de lijnspiegeling; voor het resultaat maakt dat niets uit.

*Opgave 1.* Bewijs dat de opeenvolging van drie lijnspiegelingen een lijnspiegeling is als de drie spiegelassen door één punt gaan of onderling evenwijdig



Figuur 12: Bij het bewijs van Stelling A.3, geval (3a) (links) en geval (3b) (rechts).

zijn, en een glijspiegeling in alle andere gevallen.

*Opgave 2.* Bewijs: als  $S$  een lijnspiegeling met spiegelas  $m$  is en  $\mathcal{I}$  is een willekeurige isometrie, dan is  $\mathcal{I}S\mathcal{I}^{-1}$  een lijnspiegeling met spiegelas  $\mathcal{I}(m)$ .

*Opgave 3.* Bewijs: als  $\mathcal{R}$  een rotatie met centrum  $M$  is en  $\mathcal{I}$  is een willekeurige isometrie, dan is  $\mathcal{I}\mathcal{R}\mathcal{I}^{-1}$  een rotatie met centrum  $\mathcal{I}(M)$ . Wat is de rotatiehoek?

*Opgave 4.* Stel  $\mathcal{R}_1$  en  $\mathcal{R}_2$  zijn rotaties met verschillende centra  $M_1$  en  $M_2$  en rotatiehoeken  $\alpha_1$  en  $\alpha_2$ , respectievelijk. Laat zien dat  $\mathcal{R}_2\mathcal{R}_1$  een rotatie of een translatie is. Onderzoek wanneer het een translatie is en bepaal het centrum en de rotatiehoek wanneer het een rotatie is.

*Opgave 5.* Stel  $\mathcal{R}_1$  en  $\mathcal{R}_2$  zijn niet-triviale rotaties met verschillende centra  $M_1$  en  $M_2$  en rotatiehoeken  $\alpha_1$  en  $\alpha_2$ , respectievelijk. Laat zien dat  $\mathcal{R}_2^{-1}\mathcal{R}_1^{-1}\mathcal{R}_2\mathcal{R}_1$  een niet-triviale translatie is. (Hieruit volgt dat een eindige symmetriegroep slechts hoogstens één rotatiecentrum kan hebben.)

## Literatuur

Op het internet is heel veel materiaal te vinden over islamitische ornamentale kunst en wiskundige aspecten ervan. Ook zijn er veel websites gewijd aan vlakke symmetriegroepen in het algemeen. Ik heb zelf bij de voorbereiding van deze lezing gebruik gemaakt van het artikel van Schattschneider en de boeken van Fejes Tóth en Coxeter. Meer achtergronden bij wat in de Appendix wordt behandeld, staan in mijn bijdrage aan de CWI-Vacantiecursus 1998. Veel mooi beeldmateriaal is te vinden in de hieronder genoemde boekjes van *The Pepin Press*.

H.S.M. Coxeter, *Introduction to Geometry*, 2nd. ed., John Wiley and Sons, Inc., 1969



Jan van de Craats, *De vlakke meetkunde terug op school*, in: *Meetkunde, oud en nieuw*, Syllabus van de Vacantiecursus 1998, CWI, Amsterdam, 1998.

Doris Schattschneider, *The plane symmetry groups: their recognition and notation*, *American Mathematical Monthly* 85 (1978), 439-450.

L. Fejes Tóth, *Reguläre Figuren*, Verlag der Ungarischen Akademie der Wissenschaften, Budapest, 1965.

*Islamic Designs*, The Pepin Press, Agile Rabbit Editions, Amsterdam 2002, ISBN 9057680289

*Turkish Designs*, The Pepin Press, Agile Rabbit Editions, Amsterdam 2002, ISBN 905768036X