

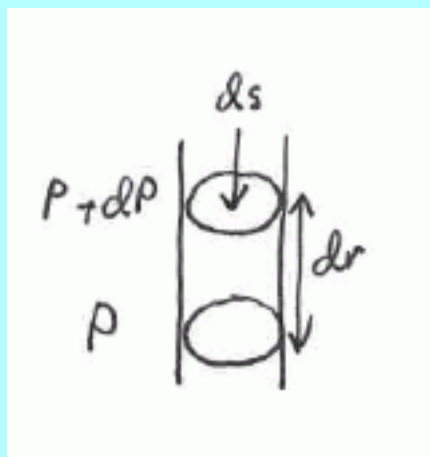
INLEIDING STERRENKUNDE

College 5. Evolutie van sterren.

Vergelijkingen van sterstructuur.

De inwendige structuur van sterren kan met drie fundamentele vergelijkingen worden beschreven.

Hydrostatisch evenwicht.



Bekijk een kolom in de ster op afstand r van het centrum. De massa binnen r is $M(r)$.

De druk omlaag t.g.v. de zwaartekracht omlaag is dan

$$P_- = \rho \frac{GM(r)}{r^2} ds dr$$

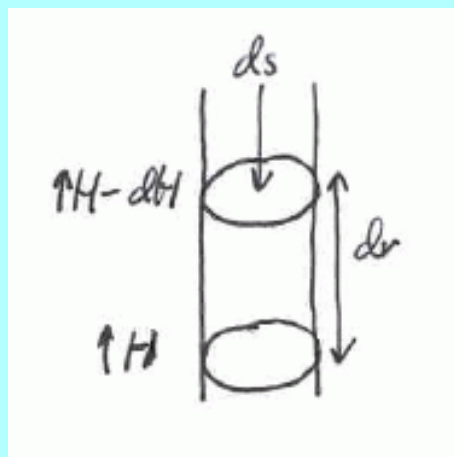
De druk omhoog is het verschil in druk over dr :

$$P_+ = P ds - (P + dP) ds = -\frac{dP}{dr} dr ds$$

Er is dus (hydrostatisch) evenwicht voor

$$-\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dr} = \frac{GM(r)}{r^2} \quad (1)$$

Kijk nu naar de straling.



Noem de stralingflux H en kijk weer in een kolom op afstand r van het centrum.

De geabsorbeerde energie per seconde is

$$E_- = \kappa H \rho ds dr$$

Hier is κ de absorptie-coëfficiënt per massa-eenheid.

Aangezien elk foton een impuls $h\nu/c$ (energie gedeeld door lichtsnelheid) heeft is dus de geabsorbeerde impuls

$$P_- = \frac{\kappa}{c} H \rho ds dr$$

Dit moet gelijk zijn aan het verschil in stralingsdruk P_{rad} over het elementje

$$-dP_{\text{rad}} ds = -dr \frac{dP_{\text{rad}}}{dr} ds = \frac{\kappa}{c} H \rho dr ds$$

De stralingsdruk is $P_{\text{rad}} = \frac{1}{3} a T^4$ met $a = 4\sigma/c$. Dus dan

$$H = -\frac{c}{\kappa \rho} \frac{dP_{\text{rad}}}{dr} = -\frac{4ac}{3\kappa\rho} T^3 \frac{dT}{dr}$$

De energie, die door een bol met straal r stroomt is dan

$$L_r = 4\pi r^2 H = -4\pi r^2 \frac{4ac}{3} \frac{T^3}{\kappa\rho} \frac{dT}{dr} \quad (2)$$

Tenslotte hebben we een toestandsvergelijking nodig en daarvoor nemen we de *ideale gaswet*

$$P = nkT = \frac{k}{\mu} \rho T \quad (3)$$

met n het aantal deeltjes per volume-eenheid en μ de gemiddelde massa van de deeltjes.

Dit zijn de drie *fundamentele vergelijkingen van sterstructuur*.

Merk op, dat κ afhangt van de preciese samenstelling, ionisatie en temperatuur van de materie.

In de praktijk hebben we nog de energie-productie nodig en moeten we bij het energie transport rekening houden met *convectie*.

Dimensionele analyse van sterstructuur.

Werk nu met gemiddelde waarden.

Dus als $T(0)$ de temperatuur in het centrum is en $T(R)$ die aan het oppervlak (en $T(R) \ll T(0)$), dan

$$\bar{T} \approx \frac{T(0) + T(R)}{2}$$

$$\frac{d\bar{T}}{dr} \approx \frac{T(R) - T(0)}{R} = \frac{-2\bar{T} + 2T(R)}{R} \approx -\frac{2\bar{T}}{R}$$

Eenzelfde vergelijking volgt dan voor P en verder

$$\bar{\rho} = \frac{3M}{4\pi R^3}$$

Vergelijking (1) wordt dan

$$\frac{2\bar{P}}{\bar{\rho}R} \approx \frac{GM(\frac{1}{2}R)}{(\frac{1}{2}R)^2} = \frac{GM}{2R}$$

Daaruit volgt

$$\bar{P} \approx \frac{GM}{4R}\bar{\rho}$$

Op dezelfde manier vinden we met vergelijking (3)

$$\bar{P} \approx \frac{k}{\mu} \bar{\rho} \bar{T}$$

Dus dan

$$\bar{T} = \frac{\mu GM}{k 4R}$$

Voor de zon komt hier $6 \times 10^6 \text{K}$ uit.

Kijk nu alleen naar evenredigheden. Vergelijking (2) geeft

$$L \propto R^2 \frac{\bar{T}^3}{\bar{\rho}} \frac{\bar{T}}{R} \propto \frac{R \bar{T}^4}{\bar{\rho}} \propto R \left(\frac{M}{R} \right)^4 \frac{R^3}{M} \propto M^3$$

Dit is de *Massa–Lichtkracht Relatie*, die we al gezien hebben.

Neem aan, dat $T_{\text{opp}} \propto \bar{T}$. Dan

$$L \propto R^2 T_{\text{opp}}^4$$

en

$$T_{\text{opp}} \propto \bar{T} \propto \frac{M}{R} \propto \frac{L^{1/3}}{R}$$

Uit deze twee vergelijkingen volgt

$$L \propto T_{\text{opp}}^6$$

Dit is de *Hoofdreeks*.

De ster produceert energie door kernfusie. De beschikbare energie is ruwweg de centrale 10% van de massa. Dus de totale energie, die een ster tijdens haar leven kan produceren is evenredig met M .

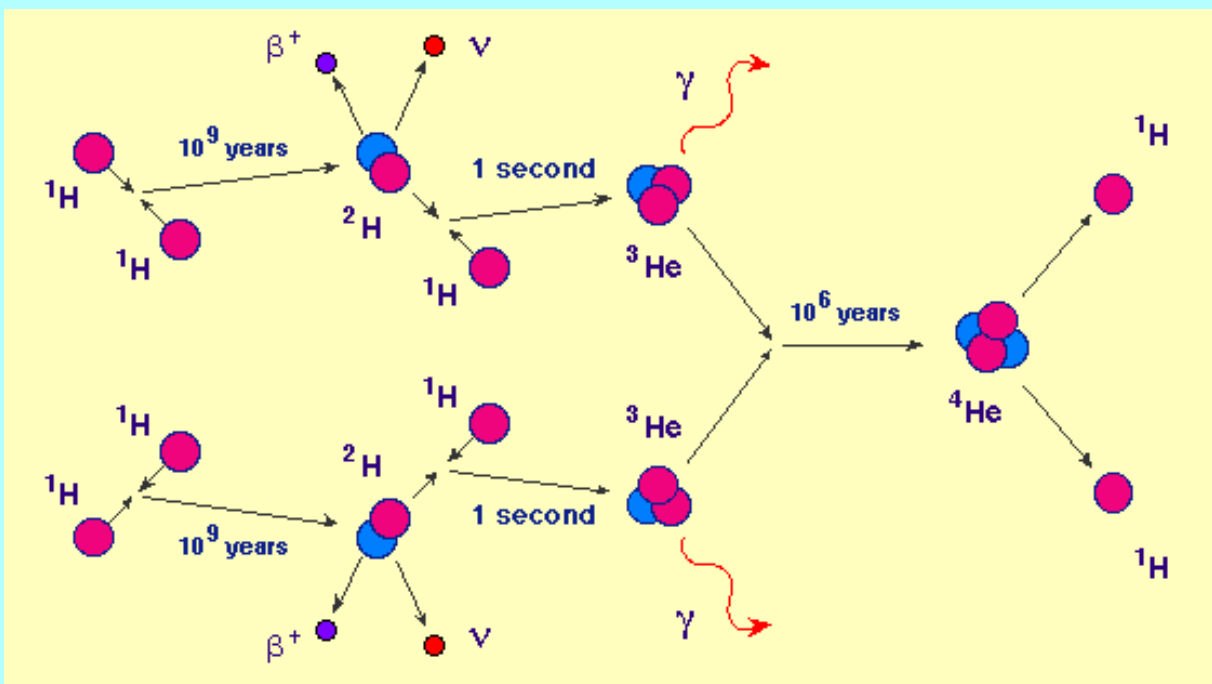
De tijd, dat een ster op de hoofdreeks staat τ volgt dan als

$$\tau \propto \frac{M}{L} \propto M^{-2}$$

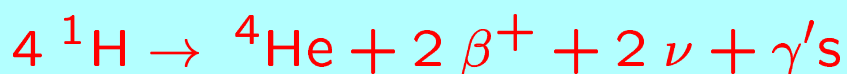
Energie productie in sterren.

Sterren op de hoofdreeks produceren energie in de centrale delen door waterstof om te zetten in helium.

In sterren als de zon gebeurt dit door de *Proton-proton-reeks*.



Totaal is de reactie te schrijven als

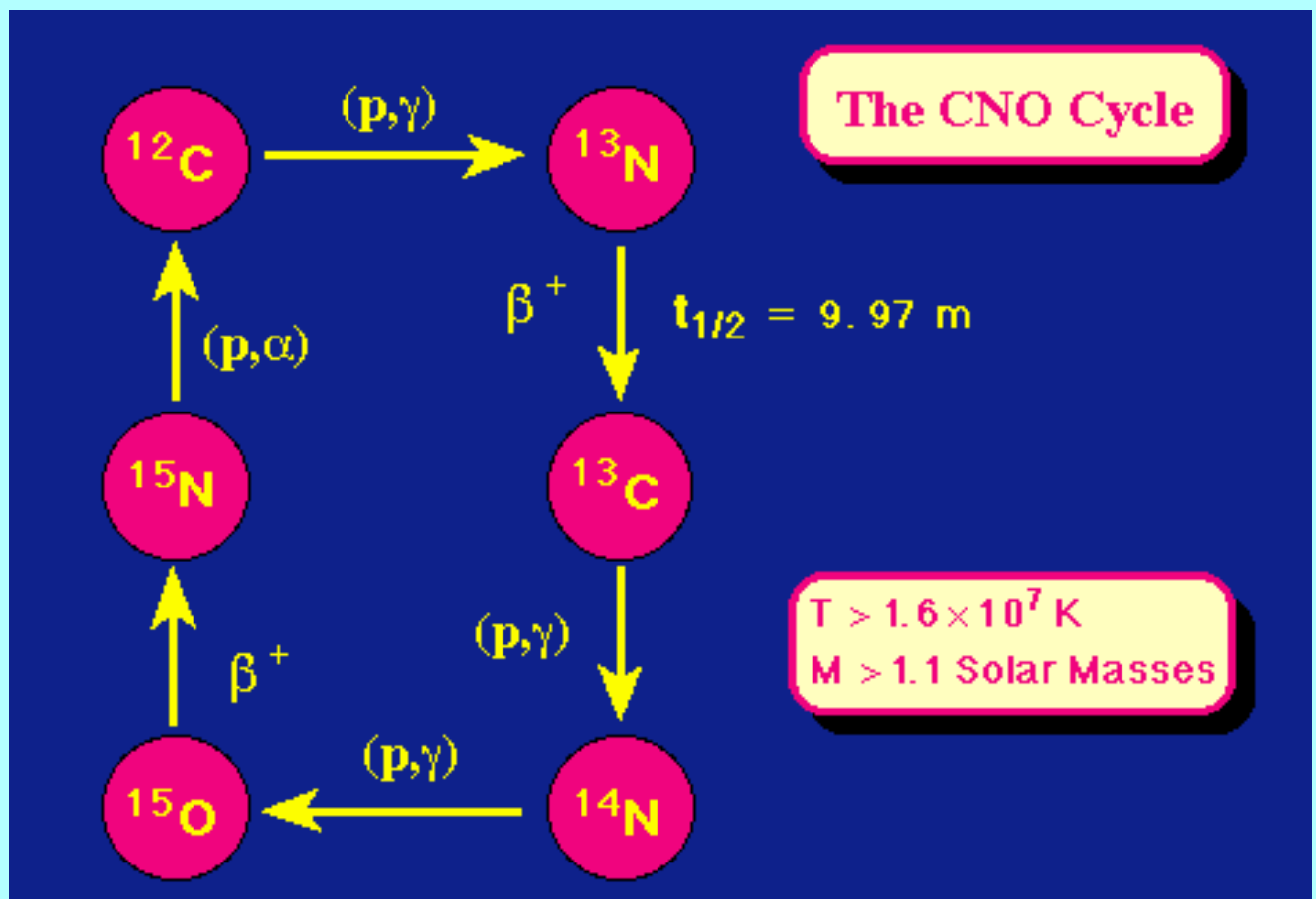


Hierin is β^+ een positron en γ een foton.

De energie wordt voornamelijk weggedragen door de neutrino's ν en de fotonen γ (samen **26.7 MeV per reactie**).

De proton–proton–reeks treedt op zolang de temperatuur lager is dan ongeveer **2×10^7 K**.

Als de temperatuur hierboven komt (dat is voor sterren een beetje heter en zwaarder dan de zon), dan treedt de **CNO–cyclus** op.



Hier betekent b.v. (p, γ) , dat een proton wordt ingevangen en een foton uitgezonden. Verder staat β^+ voor β -verval (spontaan uitzenden van een positron, omdat de atoomkern instabiel is).

De aanwezige koolstof is een catalysator. Linksboven hebben we ^{12}C en na de cyclus komt het weer terug. Immers in de laatste reactie (p, α) wordt een proton ingevangen en een α -deeltje (een He-kern) uitgezonden.

Een ster blijft op de hoofdreeks, zolang er in de centrale 10% of zo waterstof te verbranden is.

We hebben gezien, dat dit van de massa afhangt. Voor een O-ster van $15 M_{\odot}$ duurt het zo'n 10^7 jaar, voor de zon 9×10^9 jaar en voor een M-ster van $0.1 M_{\odot}$ wel 10^{12} jaar.

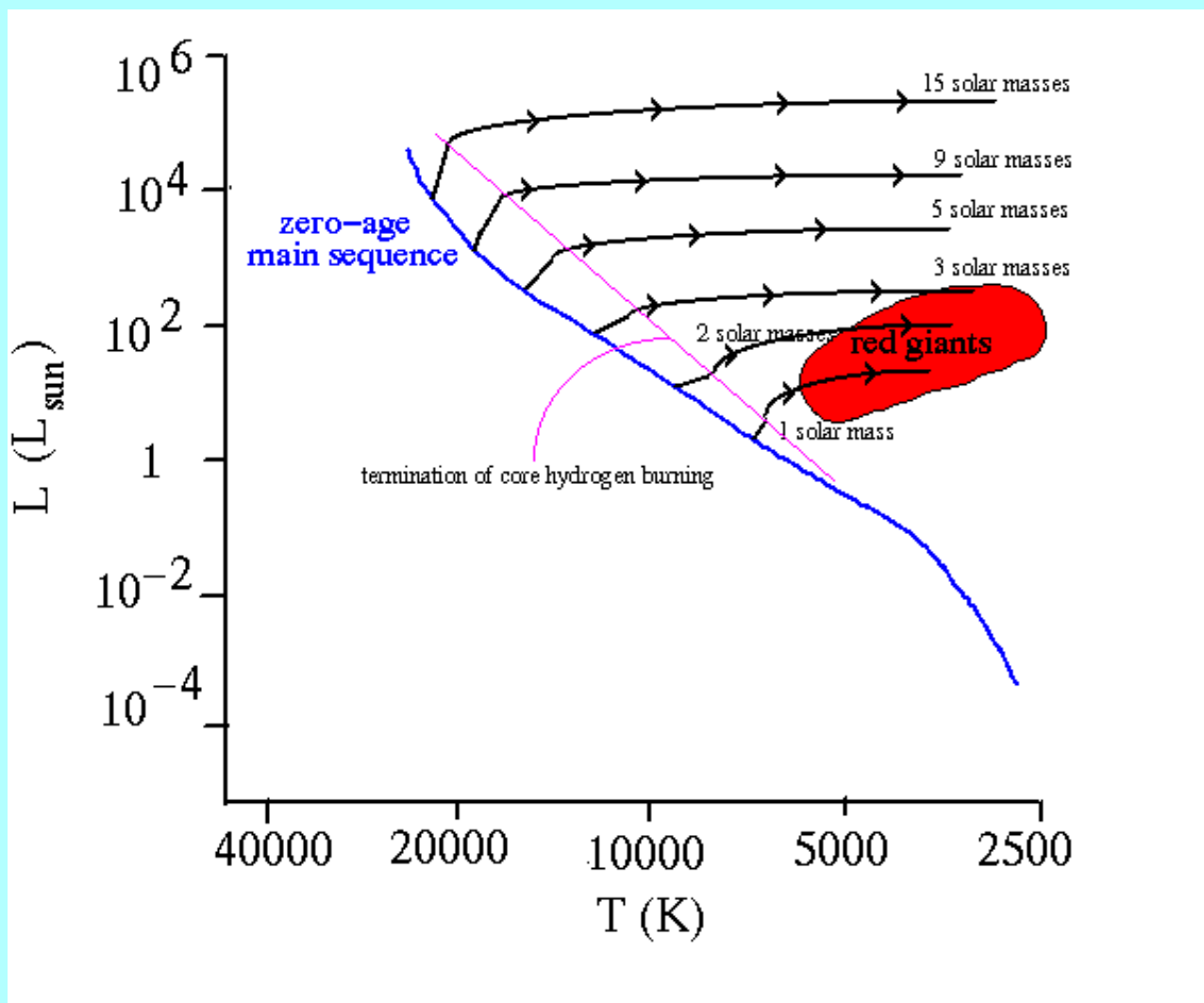
Tijdens de fase op de hoofdreeks wordt de ster langzaam helderder. Onze zon is zo ongeveer 30% helderder geworden over de leeftijd van 4.5×10^9 jaar.

Evolutie van de hoofdreeks af.

De hoofdreeks-fase van een ster eindigt, als in het centrale deel de waterstof is opgebruikt.

Dan gebeurt het volgende.

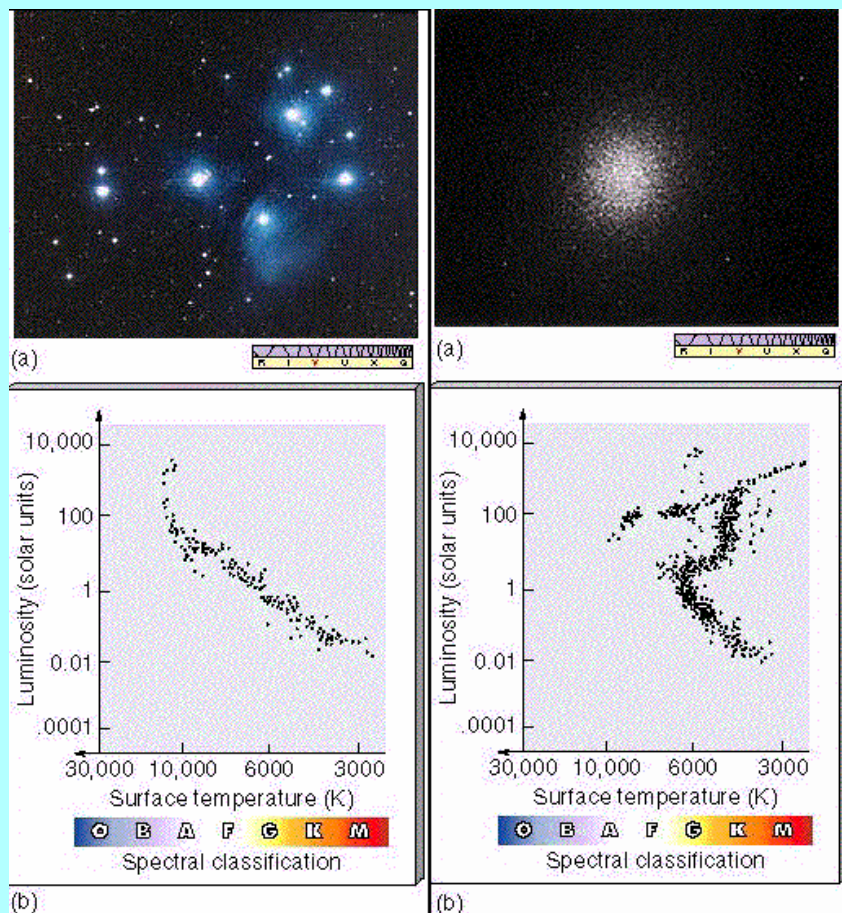
- Het centrale deel koelt af en trekt samen.
- De waterstof blijft verbranden in een schil rond het centrum.
- Daardoor wordt de ster *helderder*.
- De buitendelen zetten daardoor uit en koelen af.
- De ster wordt een *Rode Reus*.
- De ster beweegt naar rechtsboven in het H-R diagram.
- Ook dit gaat weer veel sneller bij een zware ster (van de orde van 10^4 jaar voor een (oorspronkelijk) O-ster tot zo'n 10^8 jaar voor een ster van $1 M_{\odot}$).
- Sterren lichter dan ongeveer $1 M_{\odot}$ duurt de hoofdreeks-fase langer dan de leeftijd van het heelal.



In een *sterrenhoop* of *cluster* zijn alle sterren ongeveer tegelijk ontstaan.

Daardoor heeft een jonge cluster sterren langs de gehele hoofdreeks en een oudere cluster mist steeds meer van het hete, heldere deel daarvan.

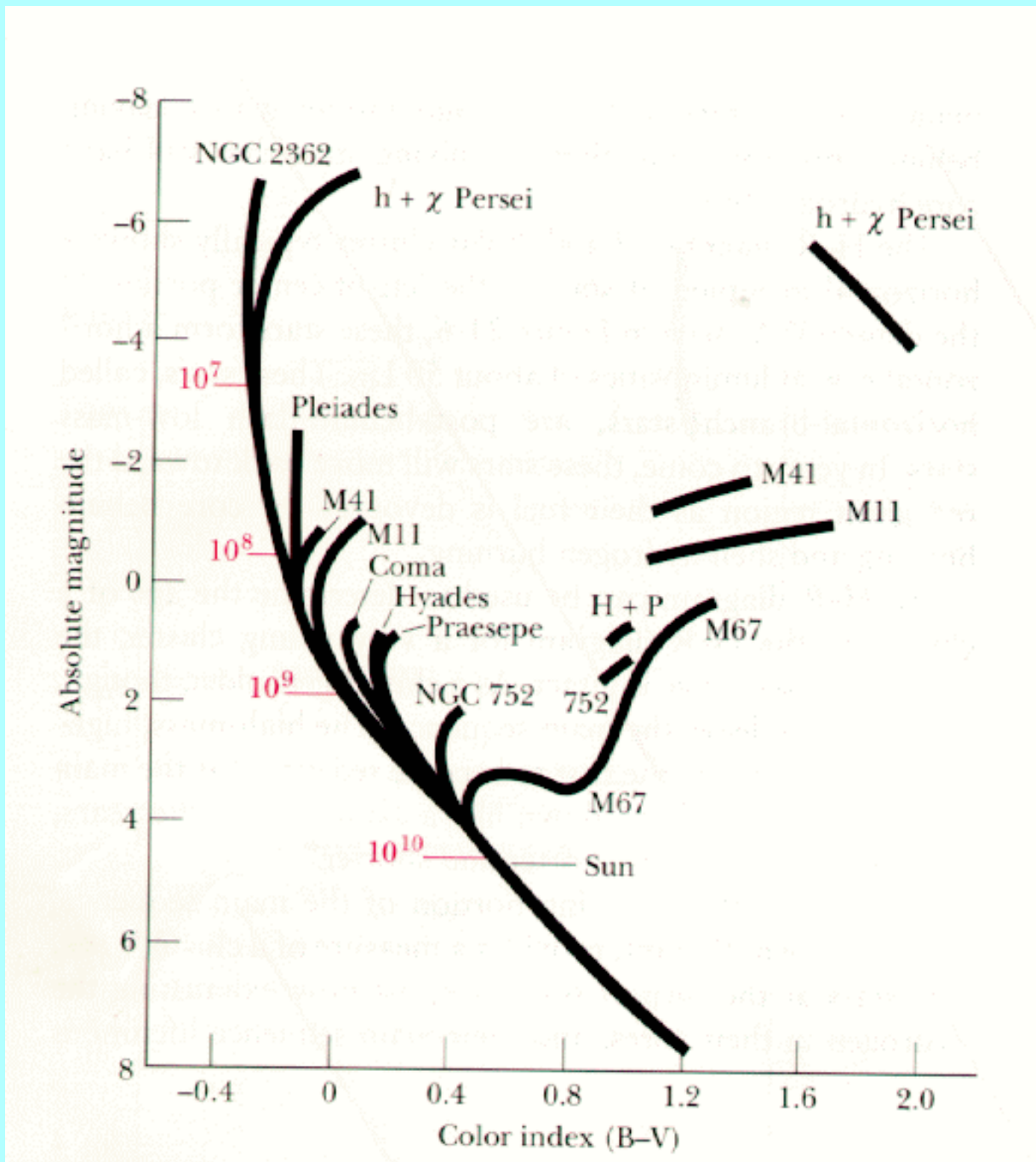
Op deze wijze kan de *leeftijd* van clusters bepaald worden.



Links zien we de **Plejaden** (Zevengesternte) met een leeftijd van de orde 10^8 jaar en de zeer oude (ruim 10^{10} jaar) cluster **Omega Centauri**.

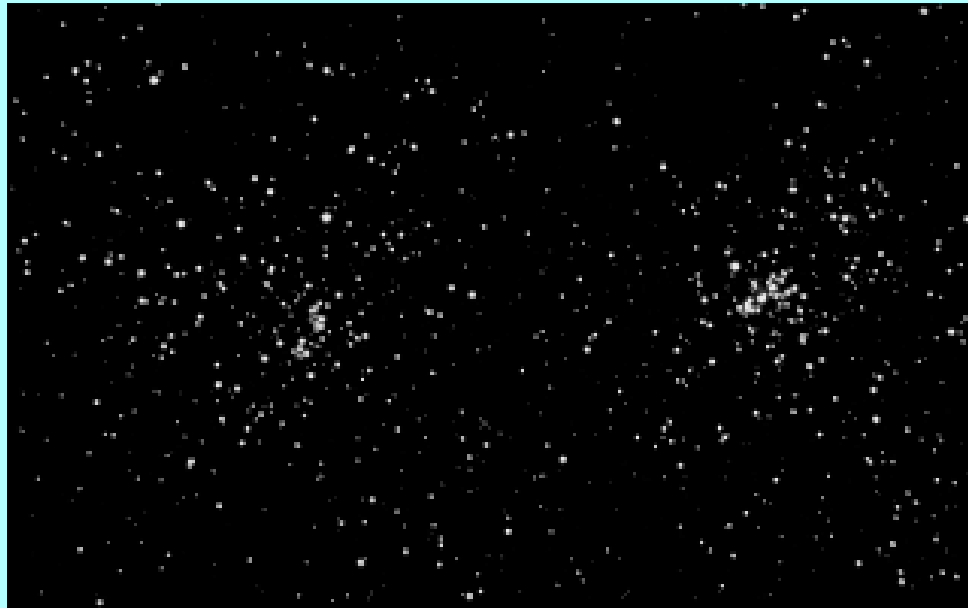
De Plejaden zijn een voorbeeld van een **open sterrenhoop** en Omega Centauri van een **bolhoop**.

De Plejaden zijn vrij dichtbij (± 75 pc) en Omega Centauri is de helderste bolhoop. Beide zijn met het blote oog zichtbaar.



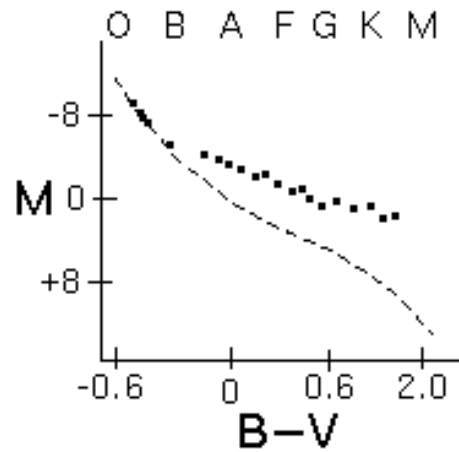
De bovenstaande figuur geeft een aantal clusters in een composiet. Langs de hoofdreeks staan de leeftijden voor clusters op de plaats waar de *turn-off* gevonden wordt.

Hieronder zien we η and χ Persei en M67.

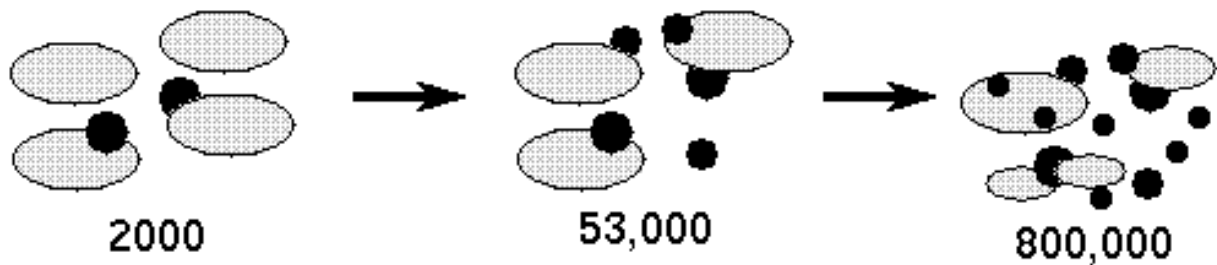


M67 wil zeggen nummer 67 in de catalogus van **Messier** van (ruim 100) nevelachtige objecten, opgesteld 1758 – 1782.

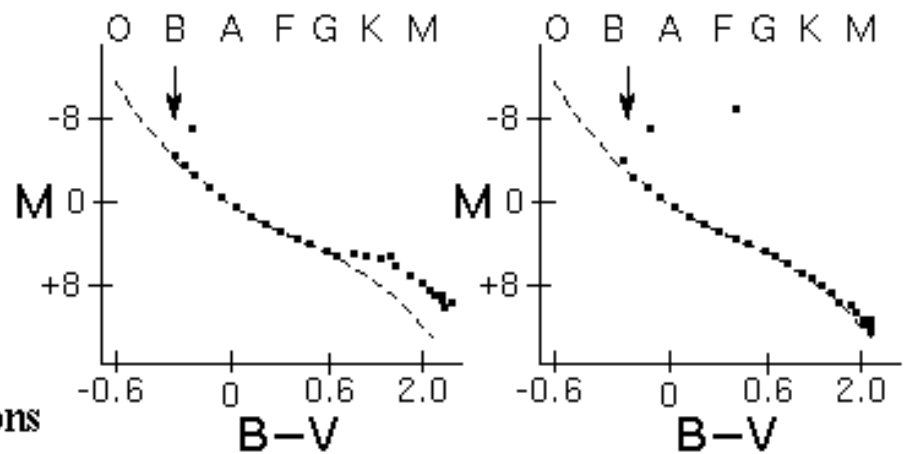
Times given in years.
Color-magnitude
(HR) diagrams for
selected stages.



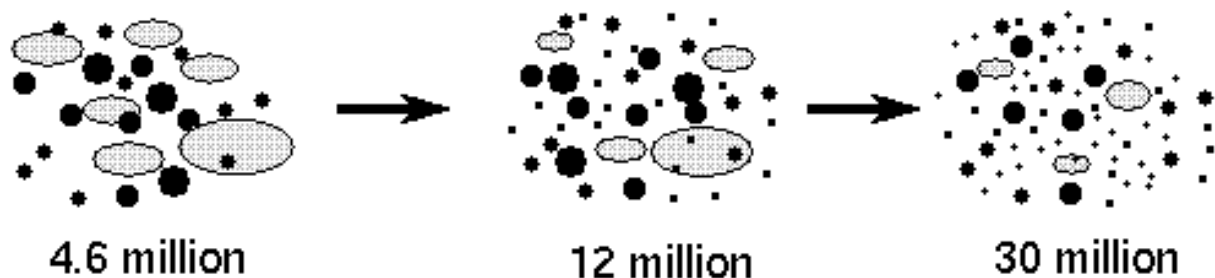
Massive stars form first.
Very young cluster has
just the massive stars on
main sequence and
lighter stars are still
collapsing toward main
sequence.

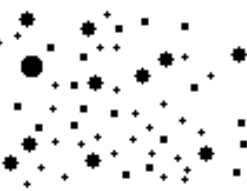
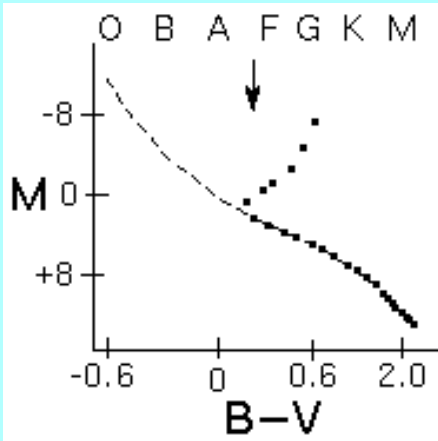


Massive stars evolve quickly.
Any O-type stars have lived
and died by 12 million year
stage! Some B-type stars
start to leave main sequence
stage while K and M-type
stars are still collapsing.

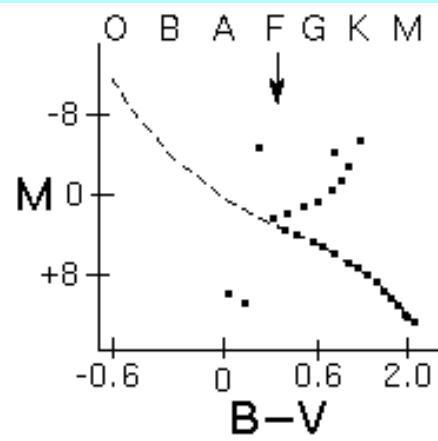


Star formation models
confirmed by observations
of real clusters.



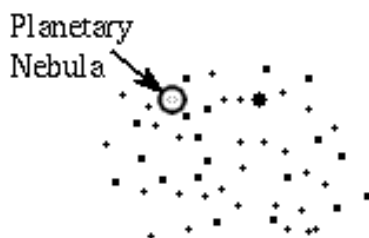
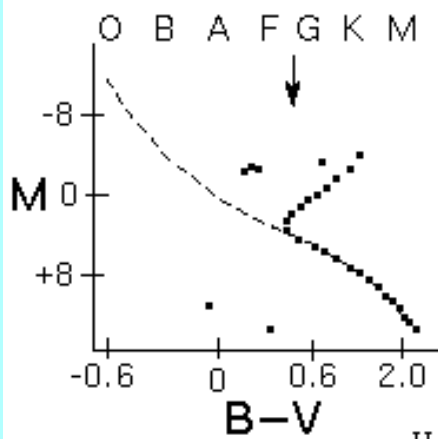


500 million

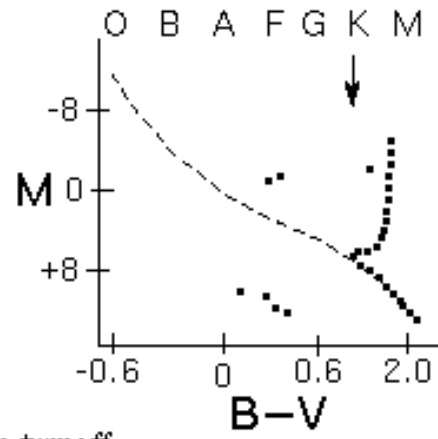


2 billion

As cluster ages, the massive stars die leaving the less massive stars on the main sequence. Arrow marks the *main sequence turnoff*.



7 billion



14 billion

Use the *main sequence turnoff* to find the age of the star cluster.

Stellar evolution models confirmed by observations of real clusters.