

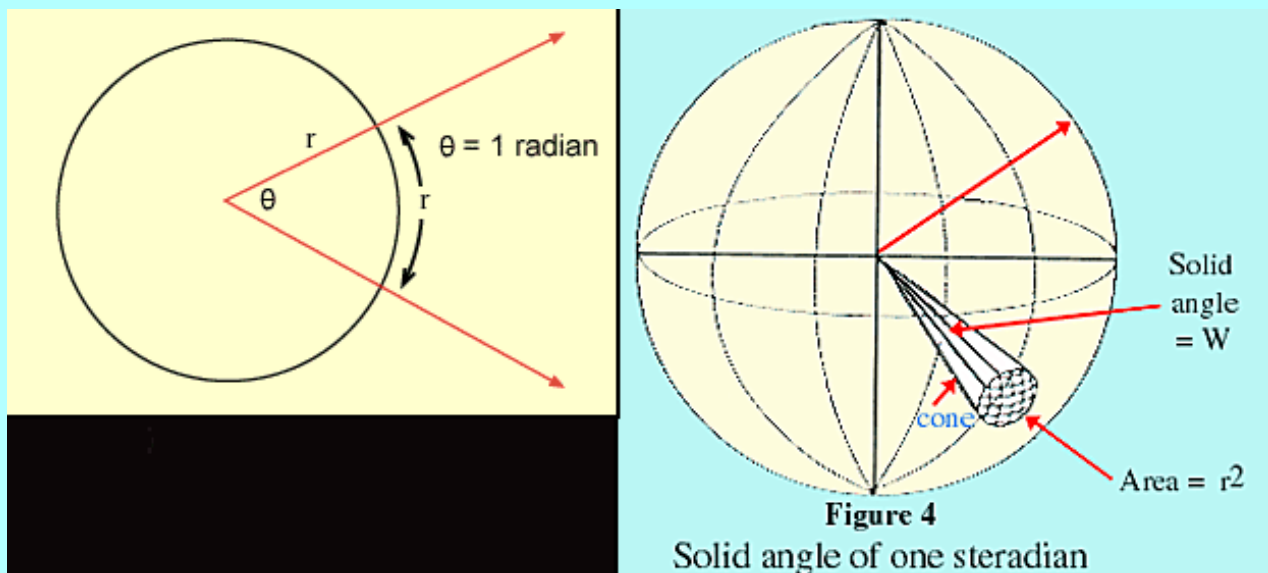
INLEIDING STERRENKUNDE

College 3. Helderheid, temperatuur, classificatie en massa van sterren; Hertzsprung–Russell diagram.

Stralingstheorie.

Ruimtehoek.

Voor het volgende hebben we het begrip ruimtehoek nodig. Dit is het twee-dimensionale equivalent van een gewone hoek.



De eenheid van ruimtehoek is de **steradiaal**.

Als voor een hoek de boog langs de cirkel gelijk is aan de straal r , is de hoek 1 **radiaal**. De volle omtrek is $2\pi r$. Er gaan dus 2π radialen in een volle hoek van 360° .

Net als voor een gewone hoek de volledige cirkel 2π radialen is, is voor de ruimtehoek de volledige bol 4π steradialen, omdat het oppervlak van een bol $4\pi r^2$ is.

Men gebruikt ook vierkante graad, boogminuut, enz. Conversie: $1 \text{ ster} = 3282.8 \text{ deg}^2 = 1.18 \times 10^7 \text{ arcmin}^2 = 4.25 \times 10^{10} \text{ arcsec}^2$.

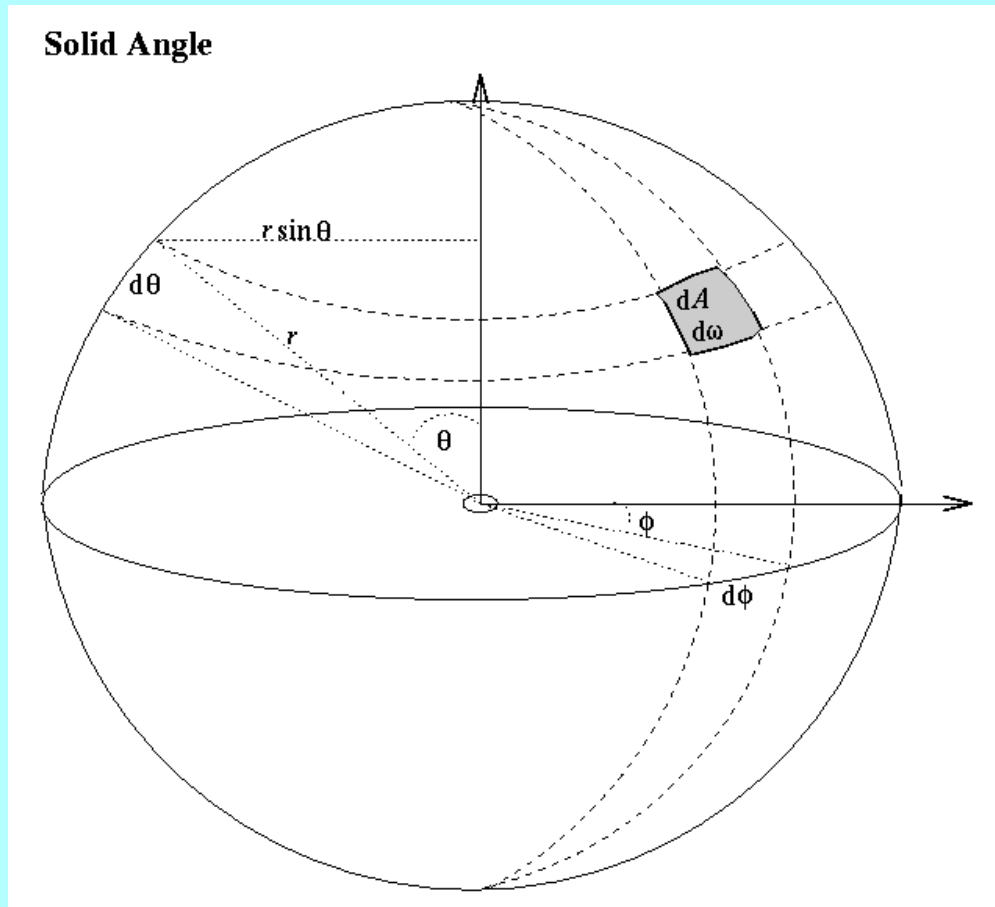
Intensiteit.

Dit is de energie, die per seconde door een oppervlak van een m^2 stroomt uit een ruimtehoek van 1 steradiaal in een bandbreedte van 1 Hz.

Dus de eenheid is I_ν in $\text{W m}^{-2} \text{ster}^{-1} \text{Hz}^{-1}$.

Flux.

Dit is de intensiteit geïntegreerd over alle ruimtehoeken.



De straling valt onder een hoek θ op het vlakje dA en loodrecht op de stralingsrichting is het dan $dA \cos \theta$.

Het ruimtehoekje is $d\omega = d\theta d\phi \sin \theta$.

Dus de flux in vanuit één halve bol is

$$\pi F_\nu = \int_{\theta=0}^{\pi/2} \int_{\phi=0}^{2\pi} I_\nu(\theta, \phi) \sin \theta \cos \theta d\theta d\phi$$

De factor π ontstaat omdat voor een uniforme intensiteit over een halve bol

$$\begin{aligned} \pi F_\nu &= I_\nu \int_{\theta=0}^{\pi/2} \int_{\phi=0}^{2\pi} \sin \theta \cos \theta d\theta d\phi \\ &= \pi I_\nu \end{aligned}$$

Fluxdichtheid.

De straling ontvangen van een object. Als het object een ruimtehoek $d\omega$ omvat is de fluxdichtheid

$$S_\nu = \int I_\nu d\omega$$

Voor een bolvormige ster met straal R op afstand D en uniforme flux aan het oppervlak wordt dit

$$S_\nu = \pi \frac{R^2}{D^2} F_\nu$$

Absorptiecoëfficiënt en optische diepte.

Als straling met een intensiteit I_ν door een medium beweegt kan er straling geabsorbeerd worden. De **absorptie coëfficiënt** κ_ν is dan de fractie, die over een eenheid van afstand wordt afgenomen.

Dus voor een afstandje dr geldt dat

$$\frac{I_\nu(r + dr) - I_\nu(r)}{I_\nu(r)} = \frac{dI_\nu}{I_\nu(r)} \equiv -\kappa_\nu(r)dr$$

Als de absorberende laag zich uitstrekt van $r = 0$ tot $r = s$, dan kan dit geïntegreerd worden tot

$$\begin{aligned} \int_{r=0}^{r=s} \frac{1}{I_\nu(r)} dI_\nu &= \ln I_\nu(s) - \ln I_\nu(0) \\ &= \int_{r=0}^{r=s} -\kappa_\nu(r) dr \equiv -\tau_\nu \end{aligned}$$

Dus

$$\frac{I_\nu(s)}{I_\nu(0)} = e^{-\tau_\nu}$$

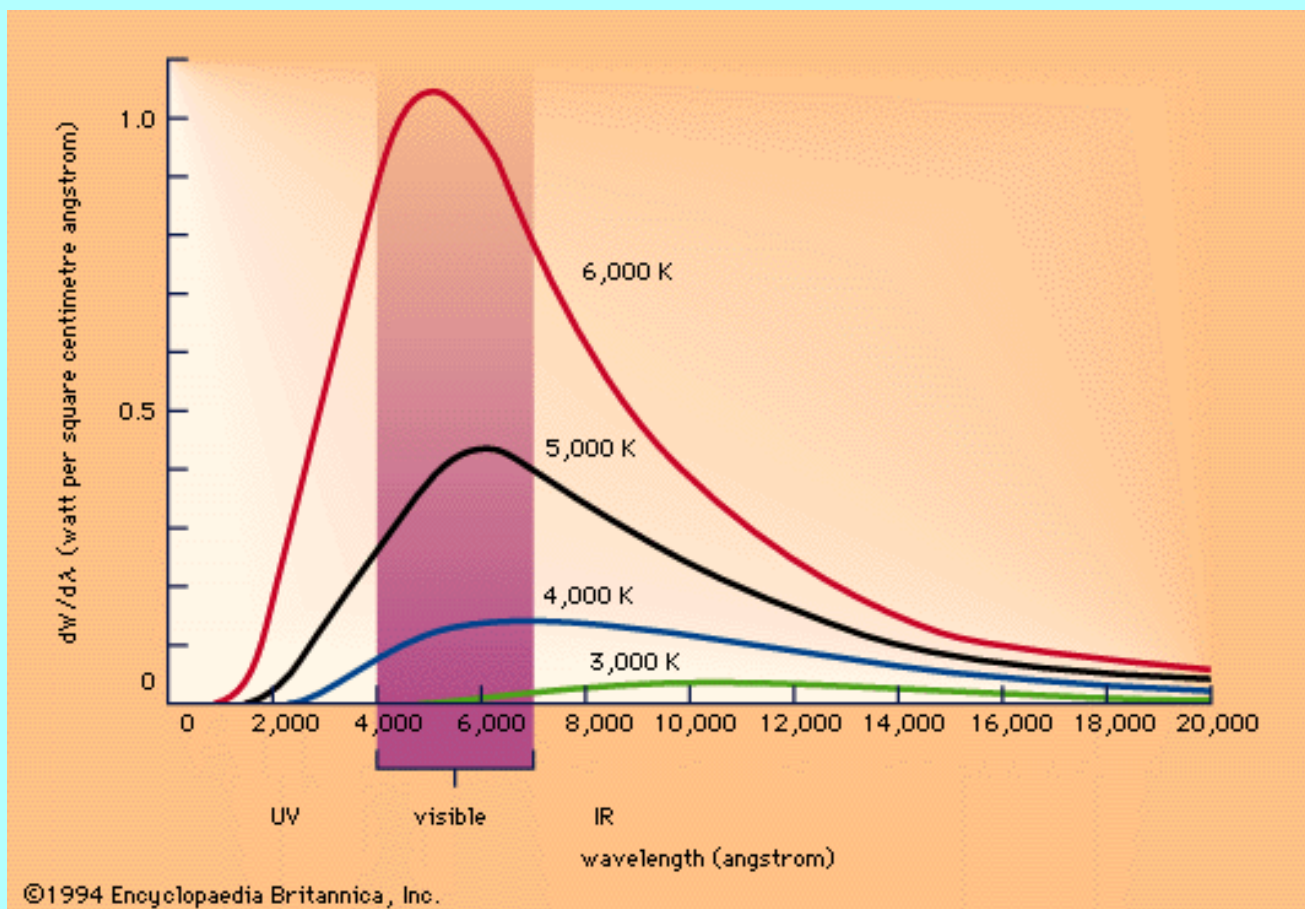
τ_ν heet de **optische diepte**.

Zwarte-lichaamstraling.

Een zwart lichaam zendt electromagnetische straling uit volgens de stralingswet van Planck, afhankelijk van de temperatuur T :

$$F_{\nu}(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1}$$

met F_{ν} de flux (in Joule $\text{sec}^{-1} \text{m}^{-2} \text{Hz}^{-1}$), h de constante van Planck en c de lichtsnelheid.



Benaderingen zijn:

De wet van Wien ($h\nu/kT \gg 1$):

$$F_\nu(T) = \frac{2h \nu^3}{c^2} e^{-h\nu/kT}$$

De wet van Rayleigh-Jeans ($h\nu/kT \ll 1$):

$$F_\nu(T) = \frac{2\nu^2 kT}{c^2}$$

De verplaatsingswet van Wien geeft de golflengte van het maximum:

$$\lambda_{\max} = \frac{hc}{3kT}$$

De uitgezonden flux over alle golflengten volgt uit de stralingswet van Stefan-Boltzmann:

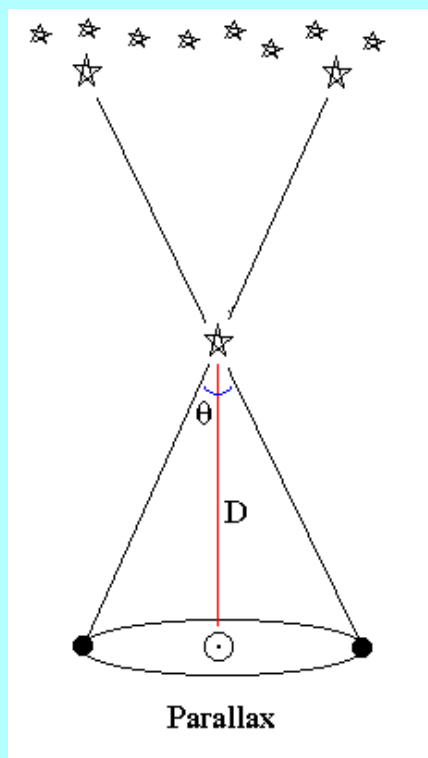
$$\pi F = \sigma T^4$$

Helderheid van sterren.

Parsec.

Om absolute, fysische grootheden van sterren te bepalen hebben we afstanden nodig.

Voor de dichtsbijzijnde sterren gaat dit volgens de *trigoniometrische parallax*. Door de beweging van de aarde om de zon beschrijft zo'n ster een ellipsje t.o.v. de achtergrond.



De halve lange as daarvan ($\theta/2$) is de parallax.

De afstand is per definitie 1 *parsec* (pc) als de parallax 1 boogseconde is.

De tangens van de parallax is 1 A.U. gedeeld door de afstand r (D in de figuur). Voor zeer kleine hoeken is de tangens gelijk aan de hoek in radialen, dus er gaan evenveel A.U. in 1 pc als boogseconden in een radiaal.

$$1 \text{ pc} = 3.1 \times 10^{13} \text{ km} = 2 \times 10^5 \text{ A.U.}$$

De dichtsbijzijnde ster heeft een afstand van 1.3 pc en dus een parallax van $0.75''$.

Soms wordt ook het *lichtjaar* gebruikt (de afstand, die het licht in 1 jaar aflegt; 0.95×10^{13} km; $1 \text{ pc} = 3.26 \text{ lj}$).

Schijnbare magnitude.

De magnitude is een maat voor de (schijnbare) helderheid van sterren. Het is een relatieve maat.

Bij fluxdichtheden S_1 en S_2 zijn de magnituden gedefinieerd als

$$m_1 - m_2 = -2.5 \log \frac{S_1}{S_2}$$

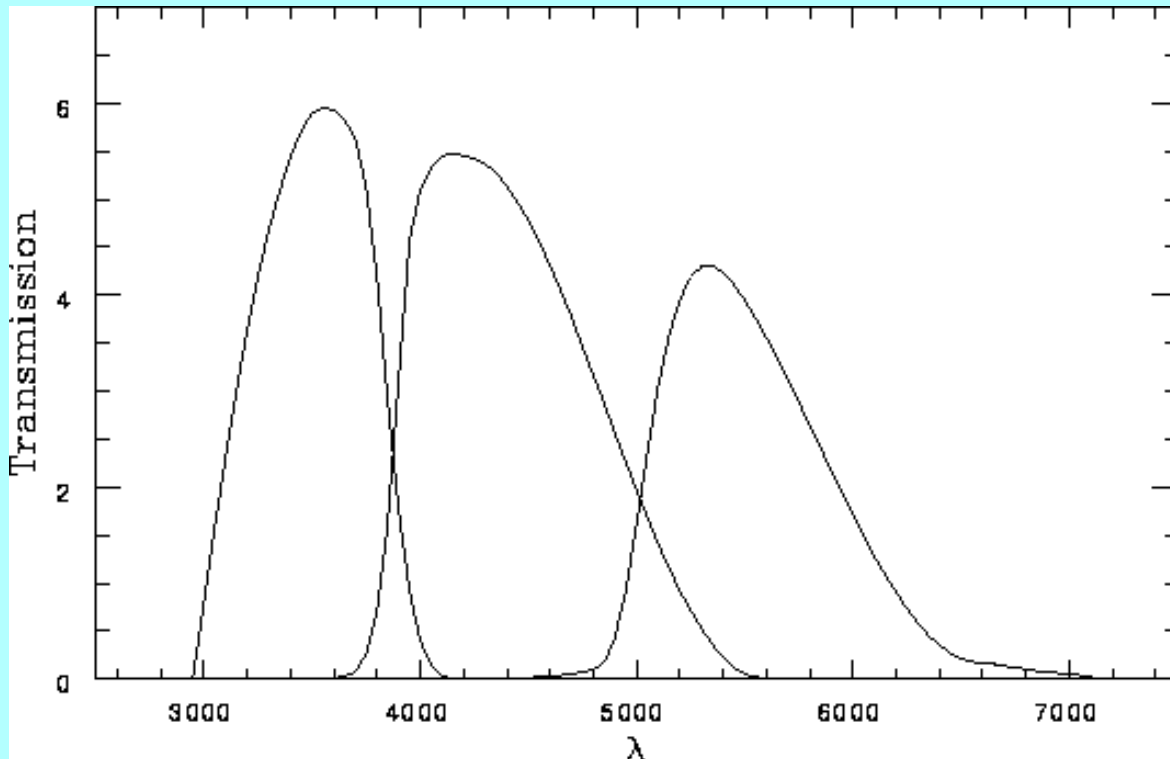
Dus 5 magnitude is een factor 100 en 1 magnitude een factor ongeveer 2.5.

Denk aan het teken: een zwakke ster heeft een grote waarde van de magnitude.

Het **nulpunt** is vastgelegd met fluxstandaarden. De keuze van het nulpunt is zo, dat de helderste sterren ongeveer magnitude 0 hebben. Voor de zon is het -26 en de zwakste sterren met het blote oog +6. Met de grootste telescopen haalt men magnitudes hoog in de 20.

In de praktijk worden magnituden bepaald met vaste golflengte gebieden. Begin twintigste eeuw waren dat m_V (visueel), m_{pg} (fotografisch) en m_{pv} (foto-visueel, met een fotografische emulsie, die ongeveer de golflengte-gevoeligheid van het oog had).

Tegenwoordig zijn er veel systemen. De belangrijkste is *Johnson UBV*.



Dit systeem is overigens uitgebreid naar andere golflengten. In ruwe termen:

Band	$\lambda_{\text{centraal}}$	λ -gebied
<i>U</i>	$\sim 3650 \text{ \AA}$	3200 – 3900 \AA
<i>B</i>	$\sim 4400 \text{ \AA}$	3900 – 5000 \AA
<i>V</i>	$\sim 5300 \text{ \AA}$	5100 – 6000 \AA
<i>R</i>	$\sim 7000 \text{ \AA}$	5900 – 7100 \AA
<i>I</i>	$\sim 9000 \text{ \AA}$	7600 \AA – 1.0 μ
<i>J</i>	$\sim 1.25 \mu$	1.04 – 1.42 μ
<i>K</i>	$\sim 2.2 \mu$	2.0 – 2.5 μ

Kleurindex.

Met magnitudes kunnen ook kleurindices gemaakt worden, zoals $(B - V)$.

Dit zijn *verhoudingen* van fluxdichtheden. Kleurindices geven dus informatie over de relatieve helderheid in de twee golflengtegebieden en daardoor voor de temperatuur van de ster (zie verder).

Per definitie zijn de kleurindices van een zogenaamde A0V-ster (zie onder) gelijk aan 0.

Het is gebruikelijk de meest blauwe magnitude voorop te zetten. Daardoor is een grote (positieve) waarde van de kleurindex een rode kleur.

Absolute magnitude.

Dit is een maat voor de intrinsieke helderheid van een ster. Het is per definitie de magnitude, die de ster zou hebben op een afstand van 10 pc (deze definitie komt overigens van Kapteyn).

Met r in pc en M de absolute magnitude krijgen we dus

$$m - M = 2.5 \log \left(\frac{r}{10} \right)^2 = -5 + 5 \log r$$

$m - M$ heet de *afstandsmodulus*.

Voor de zon $m_V = -27$, $M_V = +4.8$.

Bolometrische magnitude.

De bolometrische magnitude is die gemeten over *alle* golflengten en gecorrigeerd voor de effecten van de aard-atmosfeer.

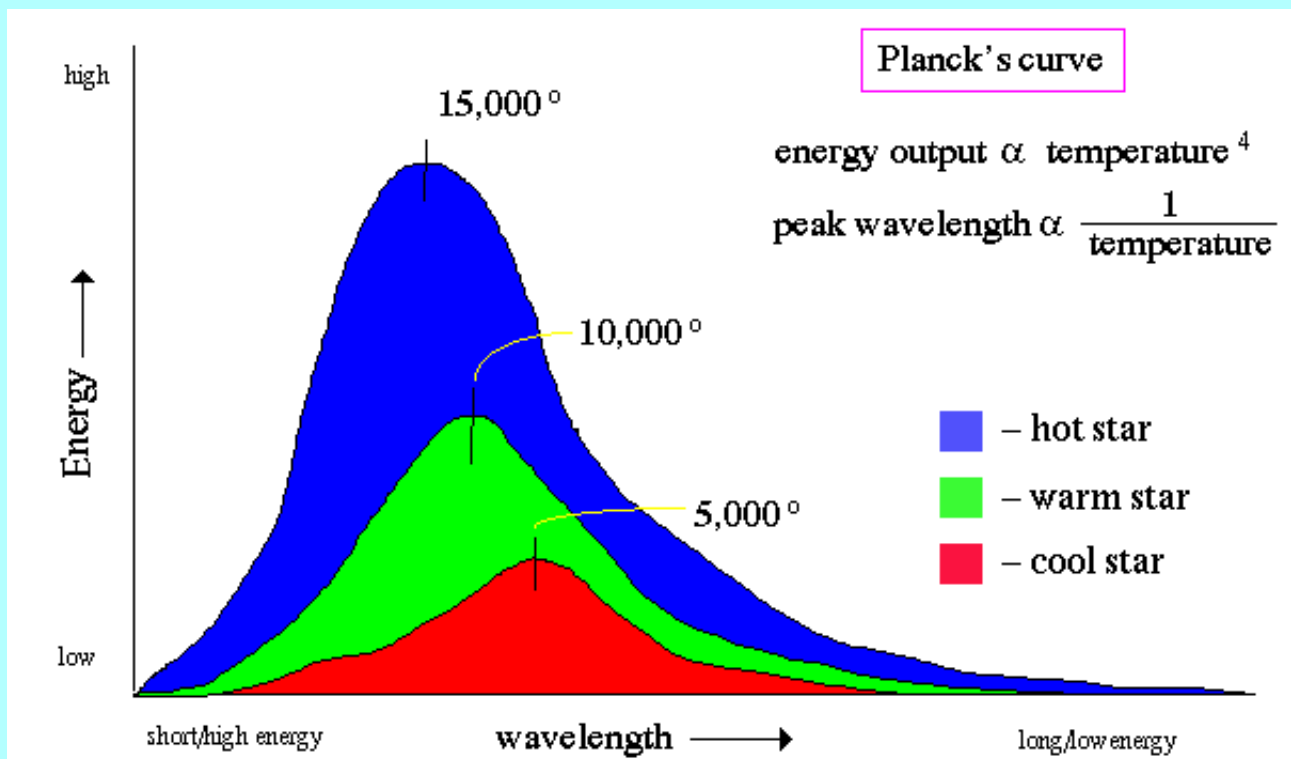
De *bolometrische correctie* is

$$BC = m_V - m_{bol}$$

Per definitie is $BC = 0$ voor de zon. De BC verschilt met type ster en is nodig om theoretische modellen van sterren met waarnemingen te vergelijken.

Effectieve temperatuur.

Een zwart lichaam zendt electromagnetische straling uit volgens de stralingswet van Planck, afhankelijk van de temperatuur.



De uitgezonden flux over alle golflengten volgt uit de stralingswet van Stefan–Boltzmann:

$$\pi F = \sigma T^4$$

Als de straal van een bolvormig zwart lichaam R is en het oppervlak dus $4\pi R^2$, dan is de totale hoeveelheid uitgezonden straling (Joule per seconde)

$$L = 4\pi R^2 \sigma T^4$$

Uit de lichtkracht L van een ster (die niet precies, maar wel ongeveer een zwart lichaam is) kunnen we dan de effectieve temperatuur op deze wijze definiëren:

$$T_{\text{eff}} = \sqrt[4]{\frac{L}{4\pi\sigma R^2}}$$

Voor de zon is T_{eff} ongeveer 5800 K.

Kleurtemperatuur.

Aangezien sterren ongeveer als een zwart lichaam stralen, moeten kleurindices ook een maat voor de temperatuur zijn.

Als we de wet van Wien gebruiken (voor $h\nu/kT \gg 1$; hetgeen eigenlijk niet altijd waar is), dan

$$V = \frac{1.562}{\lambda_V T} + \text{constante}; B = \frac{1.562}{\lambda_B T} + \text{constante}$$

Met $\lambda_B \approx 4400 \text{ \AA}$, $\lambda_V \approx 5500 \text{ \AA}$ en wetende dat $(B - V) = 0$ voor een A0V ster met $T \approx 15000 \text{ K}$) vinden we dan

$$(B - V) \approx 7000 \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{15000} \right)$$

$$(U - B) \approx 7300 \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{15000} \right)$$

Classificatie van sterren.

De **spectra** van sterren kunnen heel sterk verschillen wat betreft de absorptielijnen, die erin voorkomen. Deze absorptielijnen ontstaan in de "**atmosfeer**" van de ster, waar atomen en ionen het licht van het oppervlak absorberen.

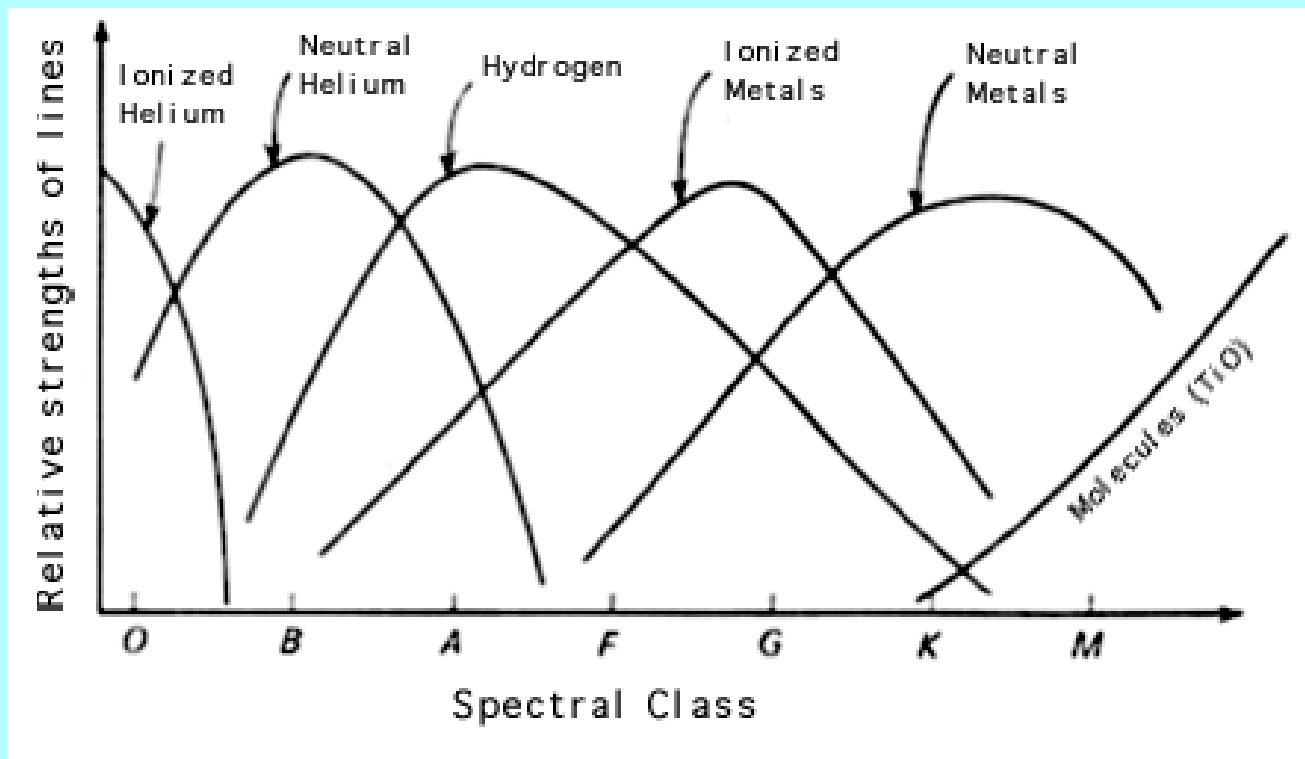
Het **oppervlak** vinden we bij de straal, waar het licht dat wordt uitgezonden over het algemeen de ster kan verlaten. Onder het oppervlak wordt het weer geabsorbeerd voordat het de ster verlaat en dat kunnen we dus nooit zien.

Welke lijnen voorkomen hangt vooral af van de temperatuur rond het oppervlak en nauwelijks van welke elementen er voorkomen. O.a. komt dit door de ionisatie, die voor verschillende elementen bij sterk verschillende energieën optreden.

Notatie is b.v. CaI voor neutrale calcium, CaII voor Ca^+ , CaIII voor Ca^{++} , enz.

De **spectraaltypen** zijn ingedeeld met een letter, gevolgd door een fijnere onderverdeling met een cijfer van 0 tot 9.

Type	T_{eff}	$(B - V)$	Sterkste lijnen
O5	40000	-0.35	HeII
B0	25000	-0.3	HeI
A0	11000	0.0	H
F0	7600	0.3	FeII
G0	6000	0.6	CaII
K0	5100	1.0	FeI
M0	3600	1.4	CaI, TiO
M5	3000	2.0	TiO



De precieze classificatie is gedefinieerd aan de hand van verhoudingen van sterkte van diverse absorptielijnen. De volgorde van de letters volgt het ezelsbruggetje: *“Oh, Be A Fine Girl/Guy, Kiss Me”*.

De zon heeft spectraaltype G2.

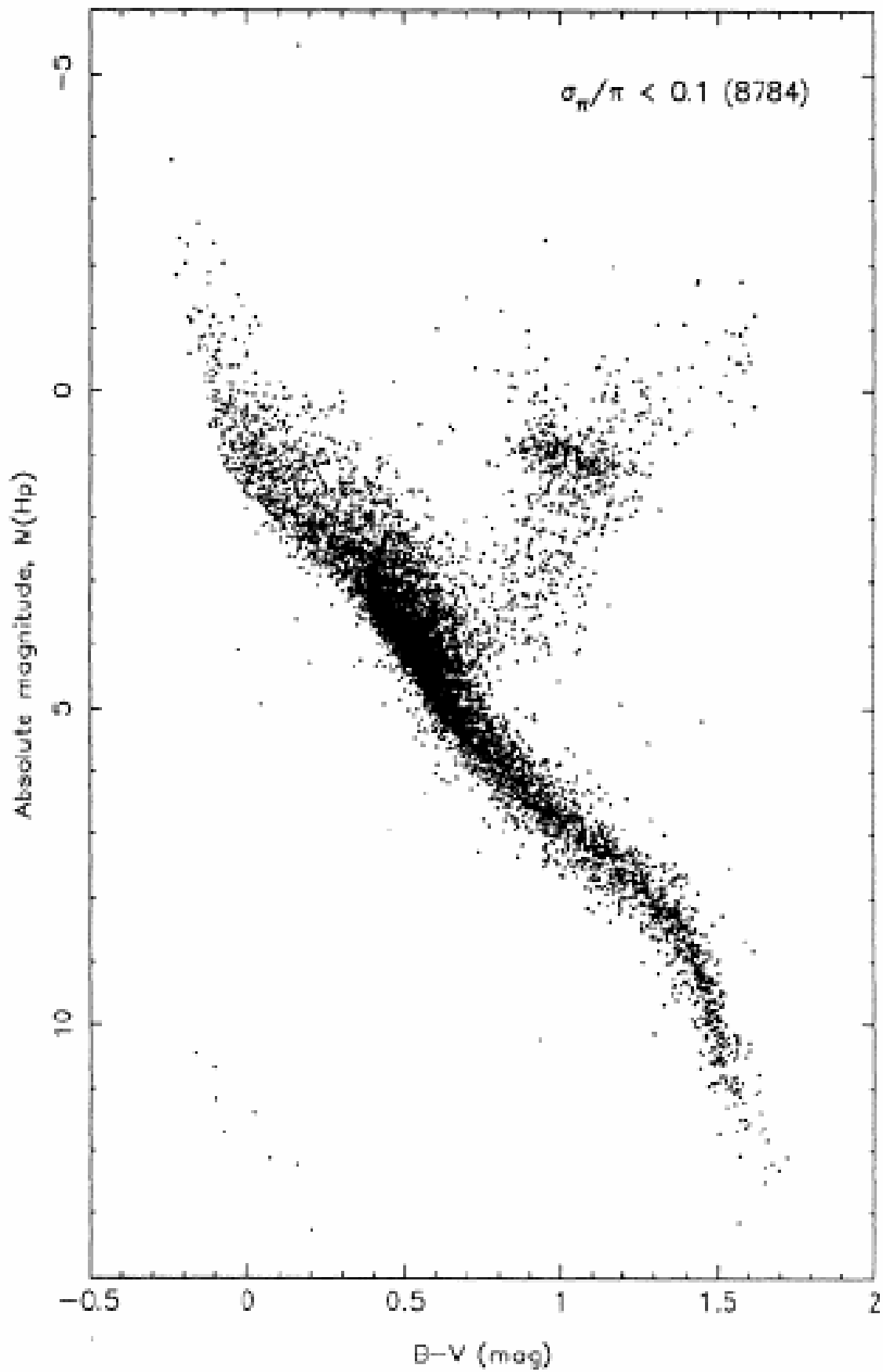
Hertzsprung–Russell Diagram.

Het meest fundamentele diagram in de sterrenkunde is het HR-diagram, genoemd naar de twee astronomen (Hertzsprung was Deen, maar vele jaren directeur van de Leidse Sterrewacht; Russell Amerikaan), die het voor het eerst maakten in 1911 en 1913.

Het is een diagram van absolute magnitude tegen spectraaltype of kleur-index. Het volgende diagram heeft alle 8784 sterren, waarvan de afstand tot 10% nauwkeurig of beter is bepaald met de Europese satelliet HIPPARCOS.

In feite is het dus een diagram van intrinsieke helderheid (lichtkracht, productie van energie) tegen de temperatuur van het oppervlak.

De lijn van links-boven (helder en heet) naar rechts-onder (zwak en koel) heet de *Hoofdreeks*. Omdat men vroeger dacht, dat dit een evolutielijn was, spreekt men nog steeds van “vroeg” (ruwweg O, B en A), “intermediaire” (F en G) en “late” types (K en M).



De sterren rechtsboven (helder, maar koel) heten *Rode Reuzen*. Waarom kan worden ingezien met de formule

$$L = 4\pi\sigma R^2 T^4$$

Immers de helderheid is hoog t.o.v. sterren van dezelfde temperatuur (of spectraalklasse of kleurindex) op de Hoofdreeks. Dan moet dus *R* groot zijn.

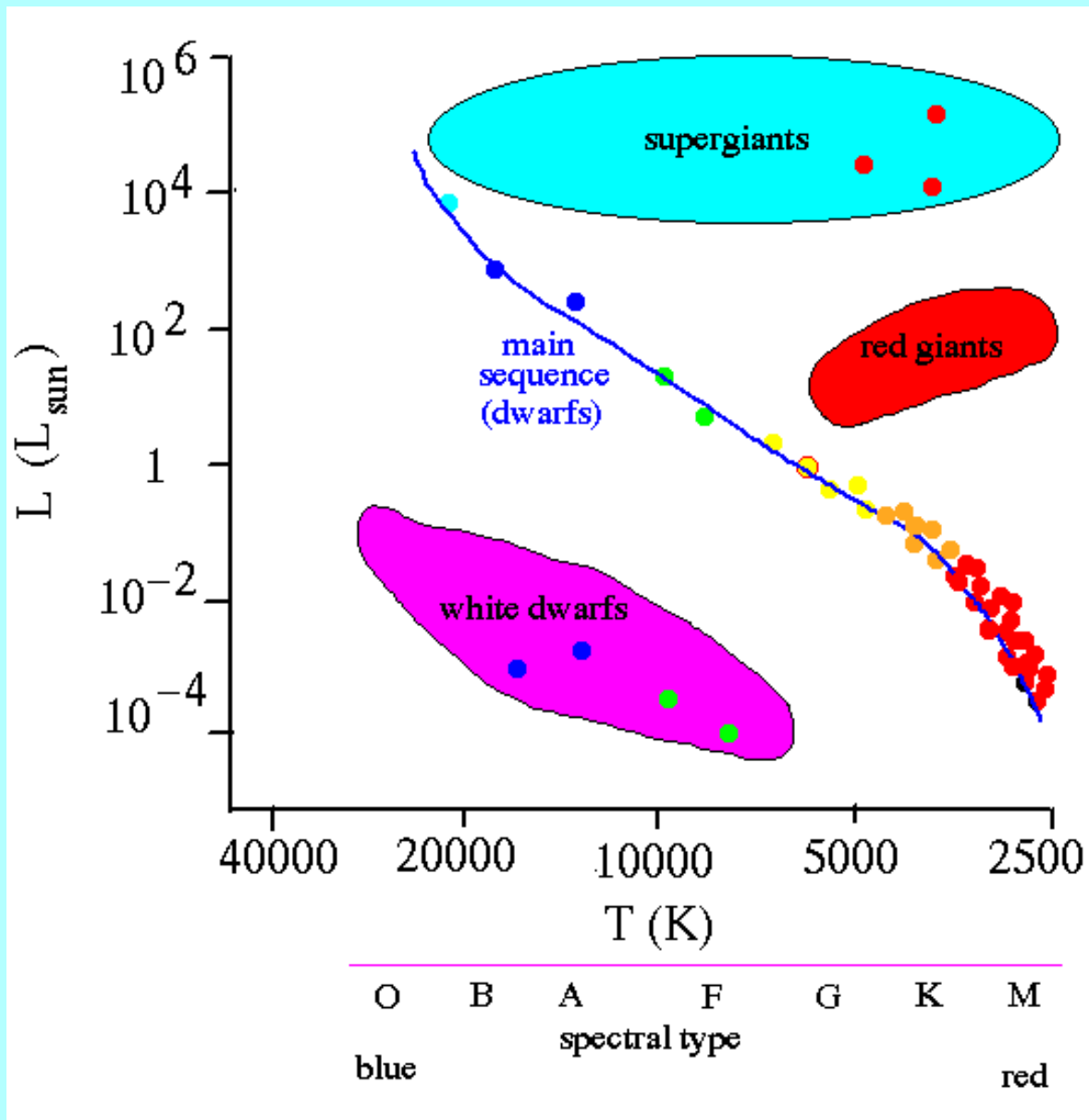
Sterren links-onder heten *Witte Dwergeren*. Dit volgt natuurlijk uit dezelfde formule.

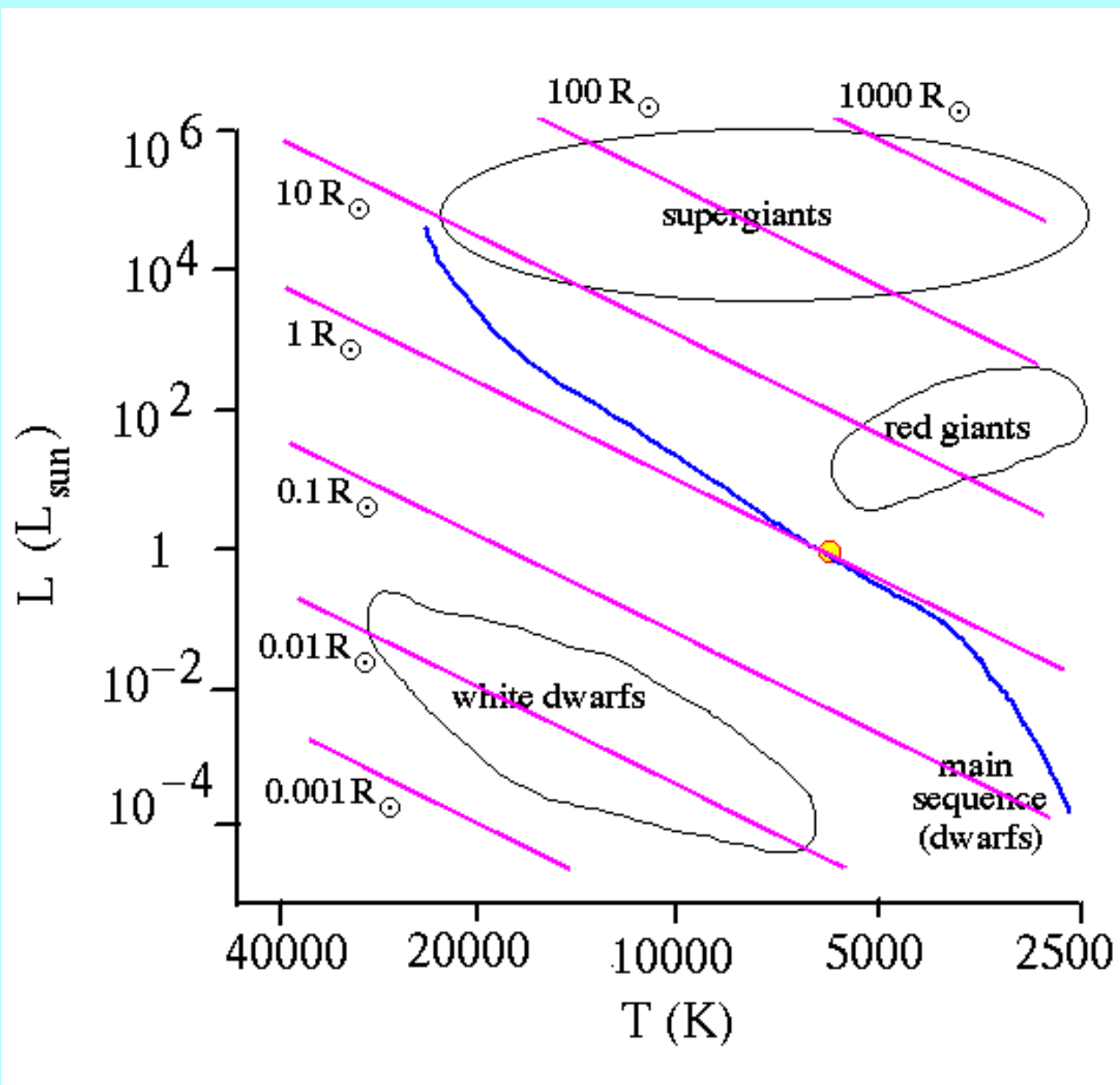
Om te onderscheiden deelt men sterren dan ook nog in naar *Helderheidsklasse*.

Een hoofdreeks-ster is klasse V, rode reuzen zijn klasse III en de helderste sterren klasse I (super-reus).

De zon is dus G2V.

Een ster van spectraaltype A0V heeft per definitie alle kleurindices gelijk aan 0.





De helderheidsklasse kan ook uit de spectraallijnen worden afgeleid. Voor een ster is de versnelling van de zwaartekracht aan het oppervlak

$$g = \frac{GM}{R^2}$$

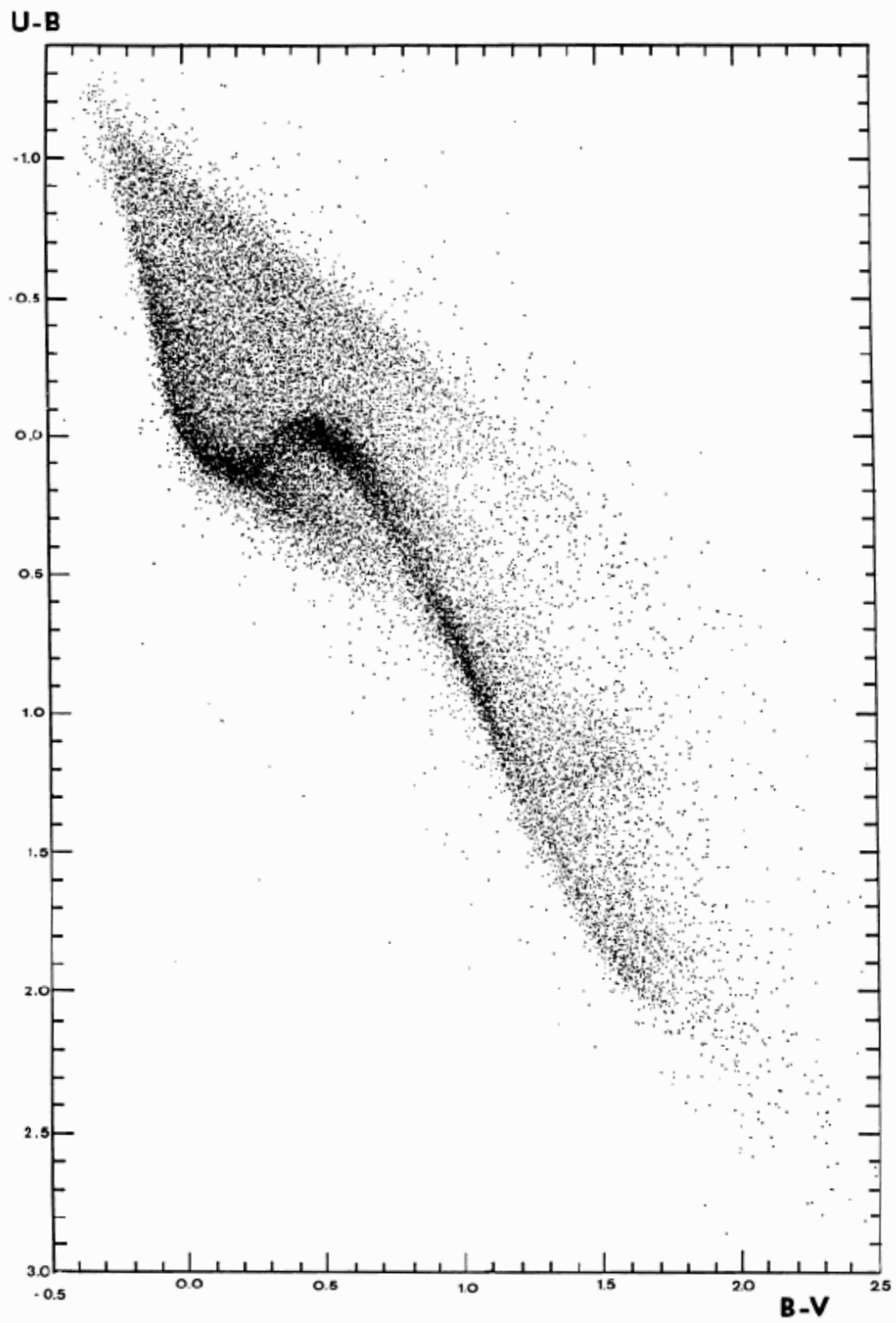
Voor een reus is R groot en dus is g relatief klein. De ster is daar in evenwicht ten gevolge van de gasdruk en bij een lage g zijn relatief kleine onderlinge bewegingen van de atomen voldoende. Dan zijn de spectraallijnen relatief smal.

Twee-kleuren diagram.

Voor sterren, waarvan de afstand niet bekend is kunnen we ook twee indices tegen elkaar uitzetten, b.v. $(U - B)$ tegen $(B - V)$. Dit heet een *twee-kleuren diagram*.

Let op de richting van de assen, zodat blauw linksboven komt en rood rechtsonder. Dus spectraaltypes lopen van O linksboven naar M rechtsonder.

De meeste sterren liggen langs een kromme lijn; de sterren, die daar niet op liggen, zijn roder geworden door verstrooiing van licht aan stof tussen de sterren (zie later). De knik gebeurt bij ongeveer spectraaltype A.



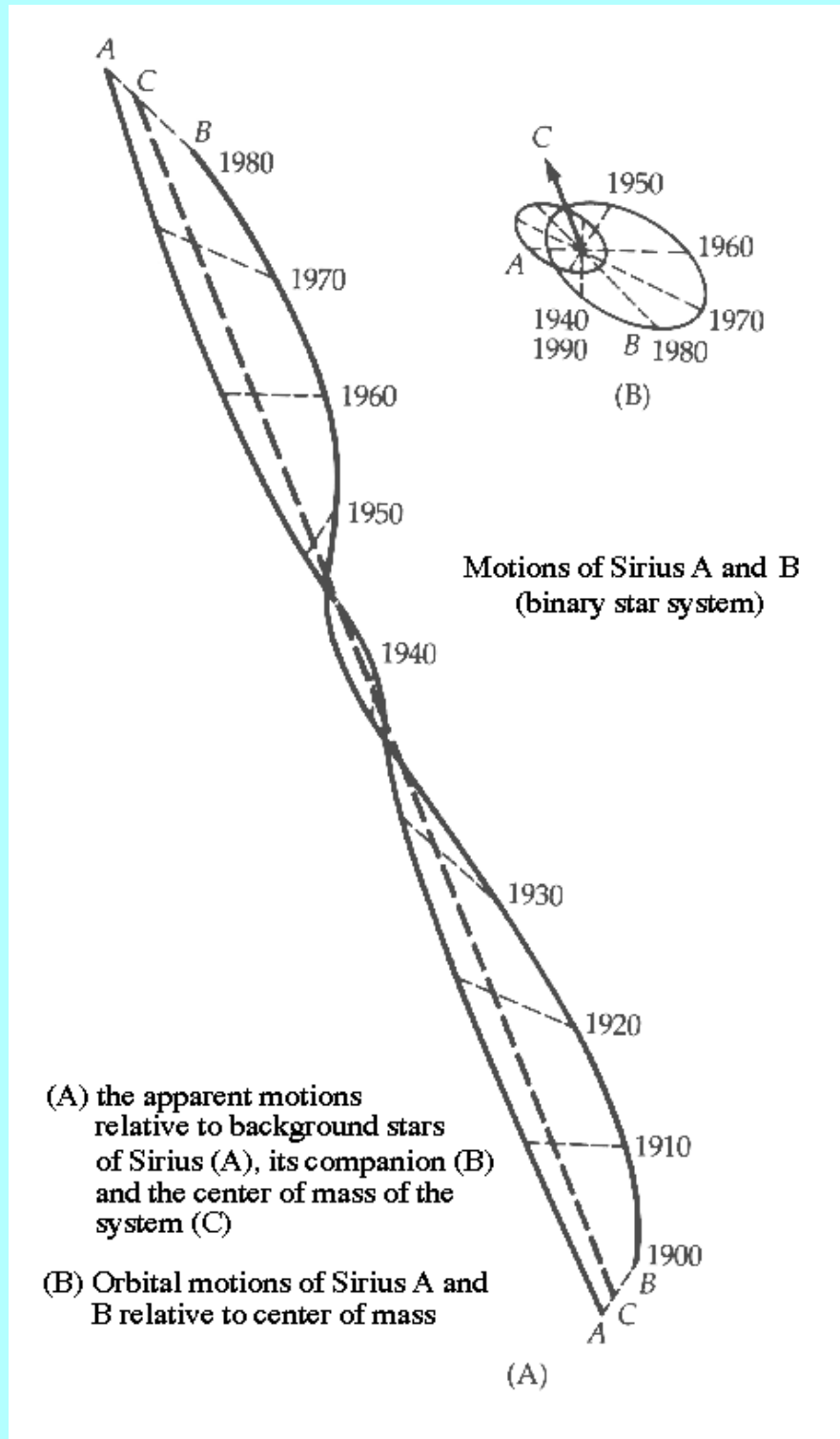
Voor zuivere **zwarte lichamen** loopt de verwachte relatie in dezelfde richting. Voor O-sterren en late typen is het verschil klein, maar deze lijn vertoont niet de knik.

De reden is de sterke **waterstof-lijnen** (Balmer reeks), die piekt bij de A-sterren. Daarvan zijn er meer naarmate we naar het blauw gaan tot ionisatie bij 3647\AA . Met name $(U - B)$ wordt daar sterk “roder” door gemaakt.

Massa van sterren.

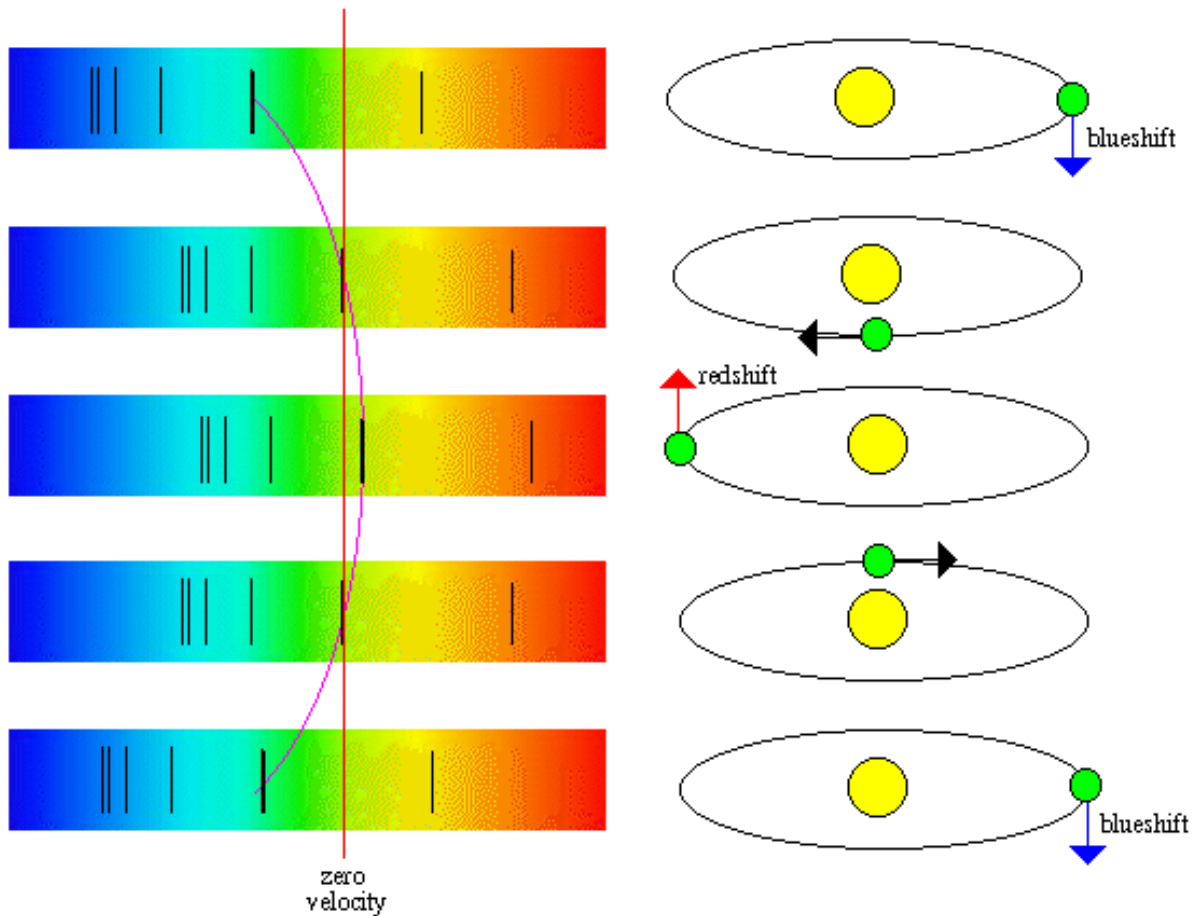
In **dubbelsterren** kan men in principe de massa van sterren meten met de derde wet van Kepler. Dit kan zowel met de baan zelf aan de hemel als met metingen van de snelheid (in de gezichtslijn).

Over het algemeen krijgt men alleen informatie over de som van de massa's. Maar als beide componenten gezien worden en de beweging van het zwaartepunt bepaald kan worden kunnen de beide massa's berekend worden.



Spectroscopic Binary

A spectroscopic binary is where there is evidence of orbital motion in the spectral features due to the Doppler effect



Voor hoofdreeks-sterren vindt men dan een bijna lineaire relatie met de lichtkracht.

Dus de Hoofreeks is een **ordering naar massa**, met de O-sterren de zwaarste (enkele tientallen M_{\odot}) en de M-sterren de lichtste ($\sim 0.1M_{\odot}$).

